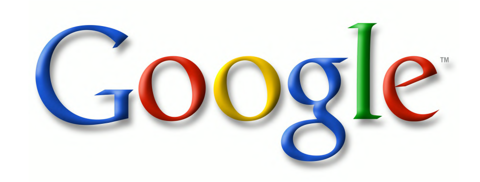
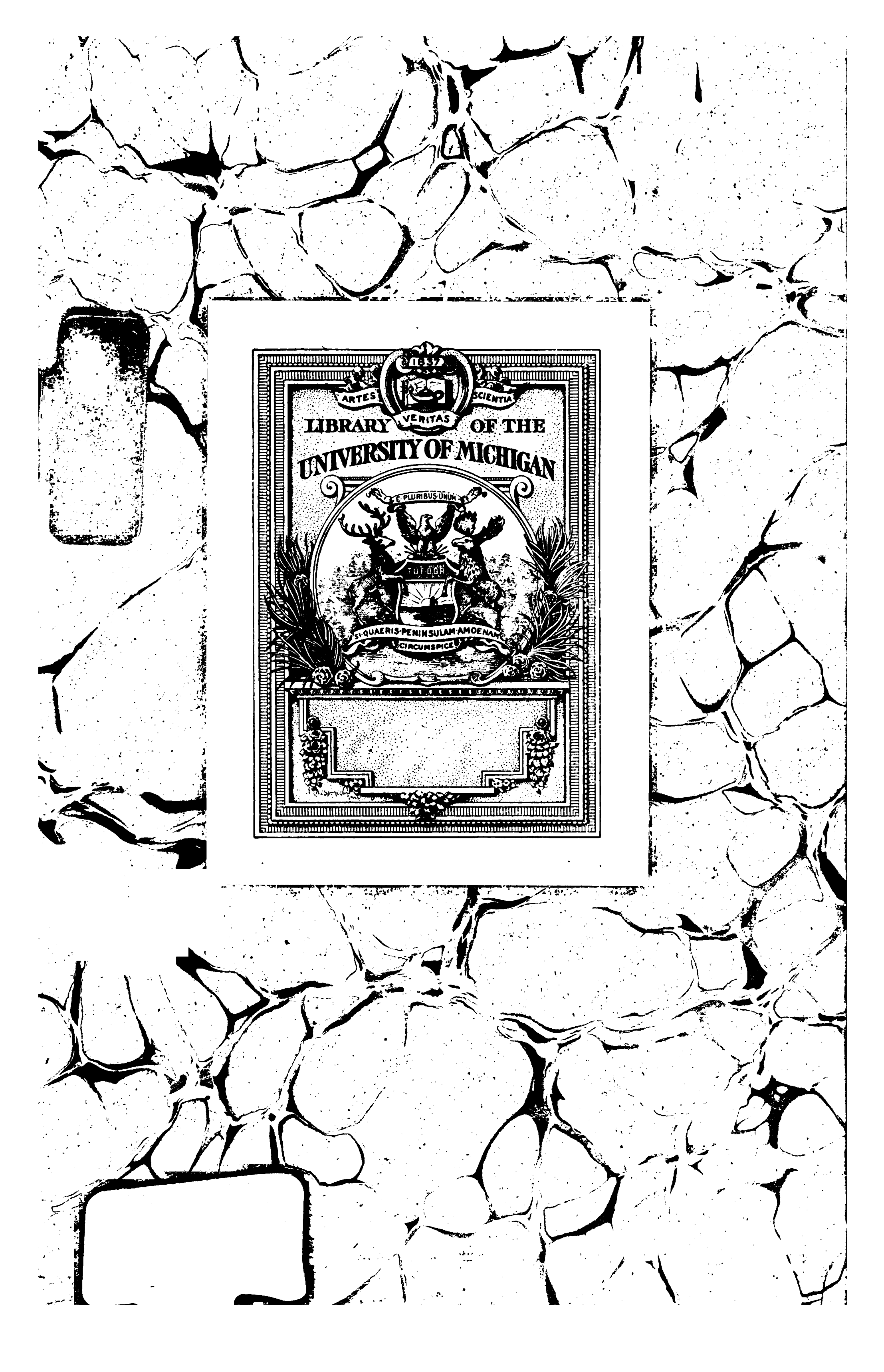
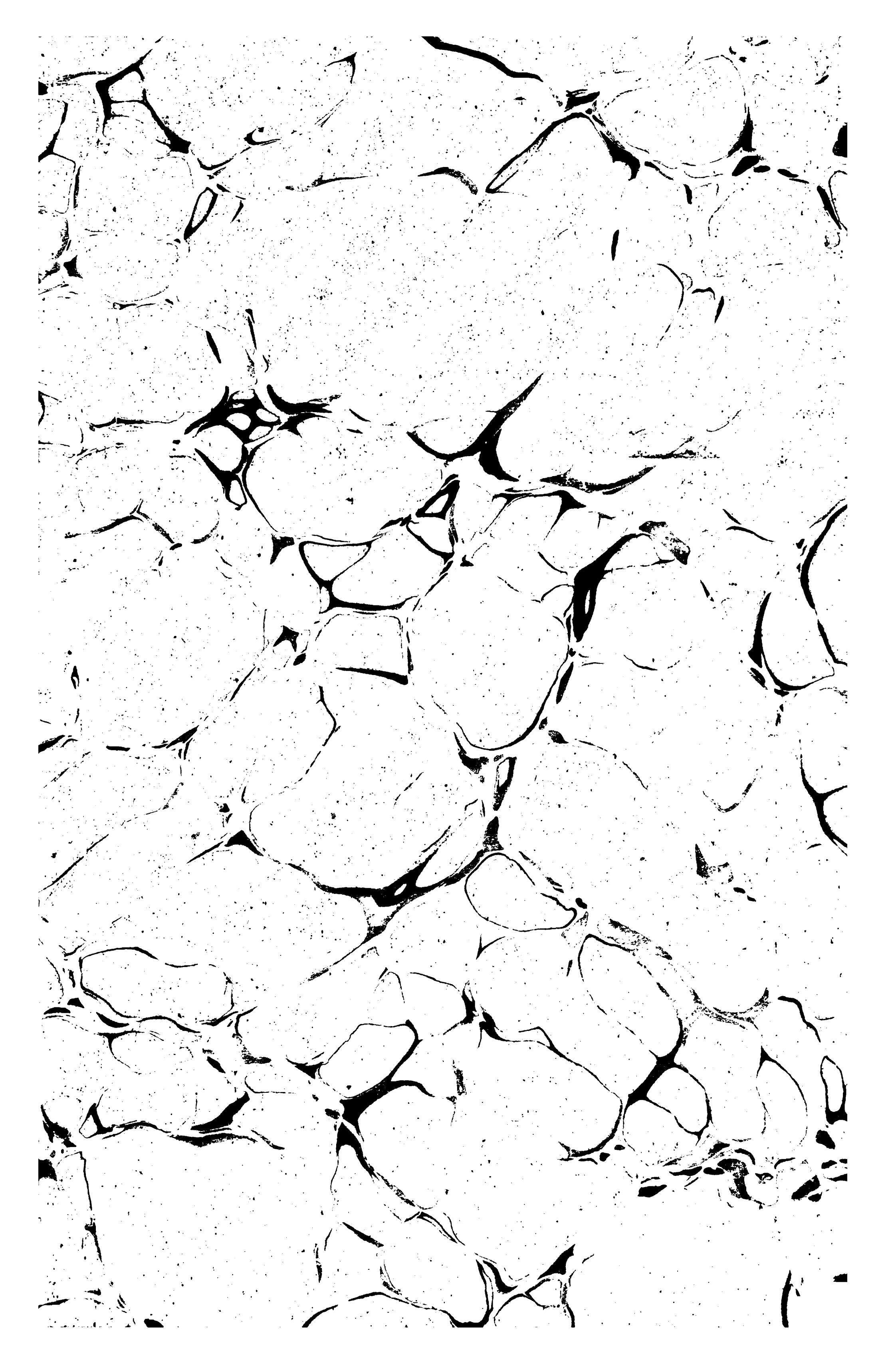
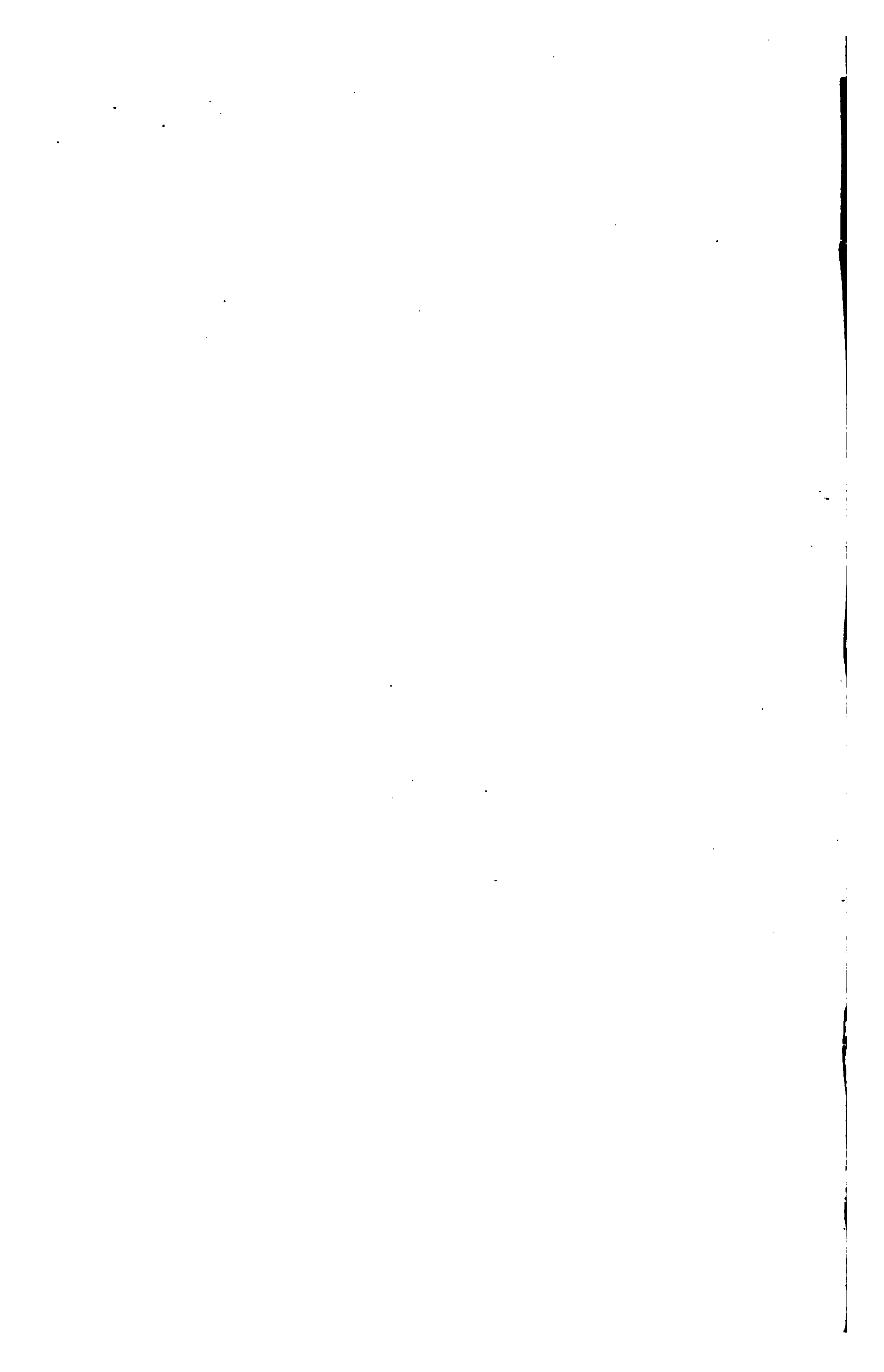
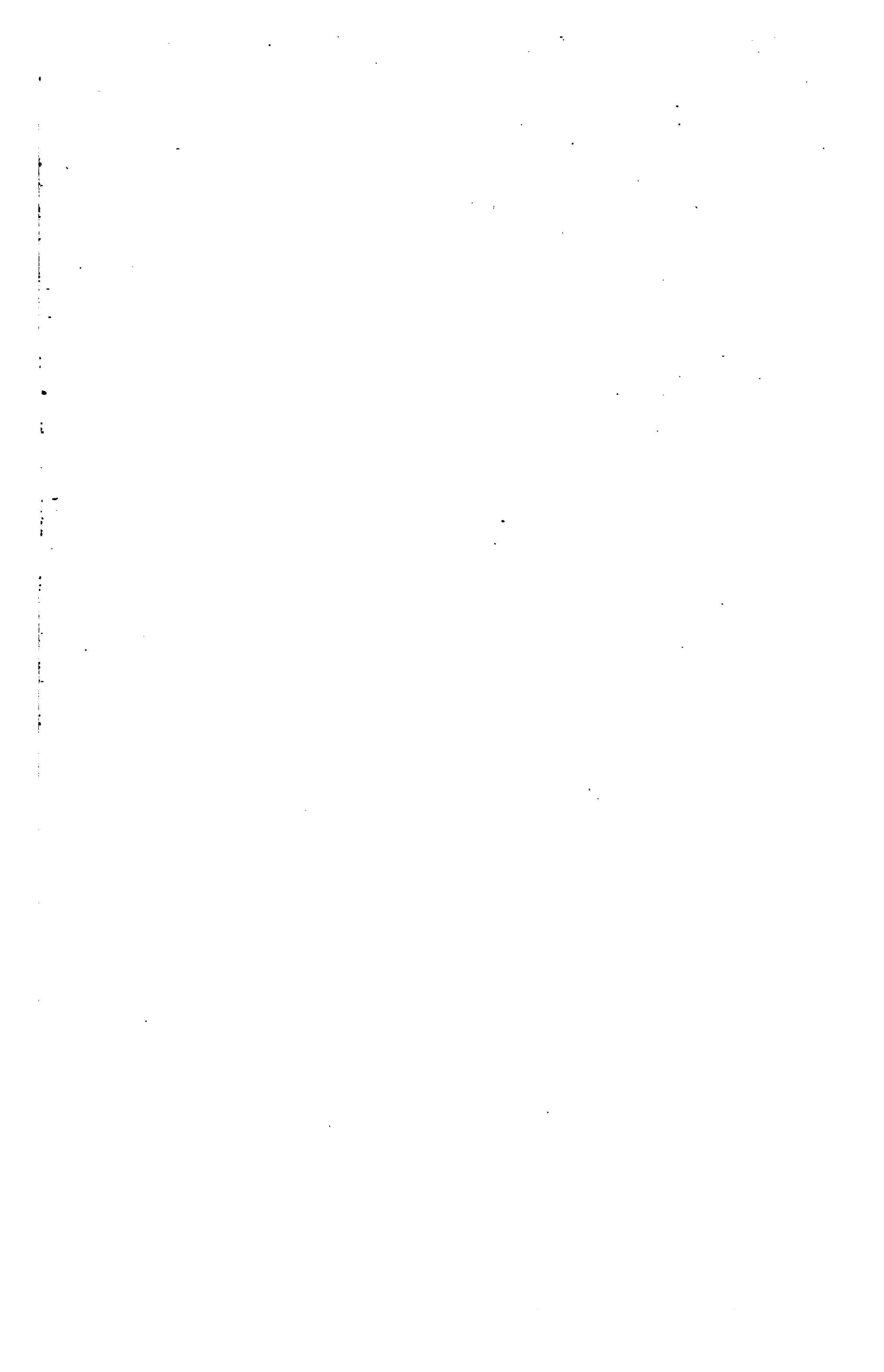
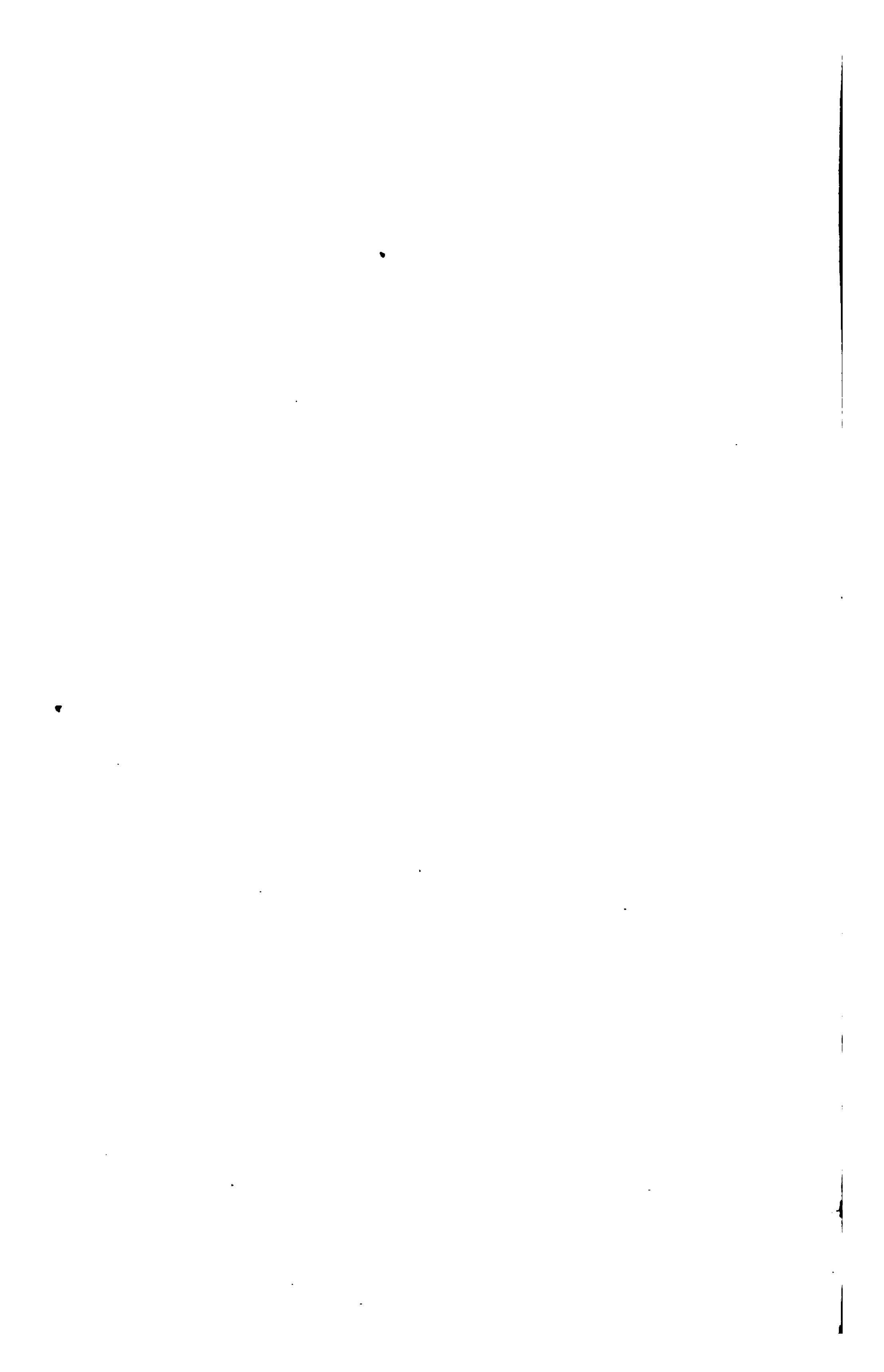



1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE









TRAITÉ

DE

CINÉMATIQUE.

Paris. — Imp. Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins.

TRAITÉ

DE

CINÉMATIQUE

A L'USAGE

DES CANDIDATS A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION

PAR E. VILLIÉ,

Ancien Ingénieur des Mines, Docteur ès Sciences,
Professeur à la Faculté libre des Sciences de Lille.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, LIBRAIRES-ÉDITEURS
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1888

INTRODUCTION.

La Cinématique ou étude géométrique du mouvement a été conçue par Ampère et son enseignement a été inauguré à la Sorbonne, en 1838, par Poncelet.

Au début, Poncelet n'avait en vue que la théorie géométrique des principaux organes de transmission de mouvement, mais, en 1841, il agrandissait le cercle des idées géométriques relatives au mouvement curviligne et introduisait dans la Science la notion fondamentale des accélérations géométriques.

La Cinématique s'est enrichie, depuis cette époque, de nombreux travaux et son enseignement confié, dans ces dernières années, à de savants géomètres, MM. Picard et Poincaré, a pris une très grande extension.

A la Sorbonne et dans plusieurs autres Facultés, les compositions écrites de Licence comportent toujours un problème de Cinématique, et les candidats ne possédant que les notions de cette Science que l'on trouve dans les Traités de Mécanique rationnelle même modernes, sont

souvent fort embarrassés pour les résoudre. J'ai cherché à combler cette lacune, tout en donnant à mon Traité un *caractère classique*. Je me suis d'ailleurs inspiré des Cours de la Sorbonne, auxquels j'ai fait de larges emprunts ; j'espère ainsi être utile aux candidats à la Licence et à l'Agrégation, qui trouveront aussi de nombreuses applications sur la Cinématique dans mon précédent Ouvrage intitulé *Compositions d'Analyse et de Mécanique*.

TRAITÉ

DE

CINÉMATIQUE.

CHAPITRE I.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL.

1. — Préliminaires.

Ampère a défini la Cinématique : l'étude du mouvement indépendamment des causes qui le produisent, c'est-à-dire des forces. A côté de la notion d'espace qui fait l'objet de la Géométrie, la Cinématique introduit la notion du temps.

1. *De la grandeur géométrique.* — On appelle *grandeur géométrique* une longueur OA (*fig.* 1), portée sur une direction donnée, dans un sens déterminé.

Soit OB une seconde grandeur géométrique ; menons AB′ égale et parallèle à OB, et de même sens, la grandeur OB′ est appelée la *somme géométrique* des grandeurs OA

et OB et l'on écrit

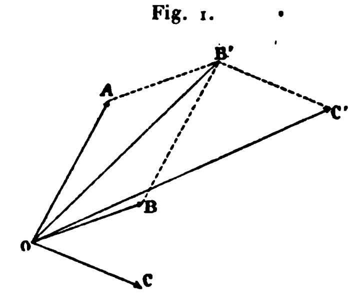
$$(OB') \equiv (OA) + (OB).$$

Cette grandeur OB', diagonale du parallélogramme construit sur OA et OB, s'obtiendrait encore en prenant d'abord OB, puis BB' égal et parallèle à OA ; donc

$$(OB') \equiv (OA) + (OB) \equiv (OB) + (OA).$$

Soit ensuite B'C' égal et parallèle à OC, OC' est la

Fig. 1.



somme géométrique de OA, OB, OC, et l'on a

$$(OC') \equiv (OA) + (OB) + (OC).$$

De ce qui précède et d'un théorème connu en Géométrie on déduit cette conséquence :

La projection de la somme de plusieurs grandeurs géométriques est égale à la somme des projections de ces grandeurs.

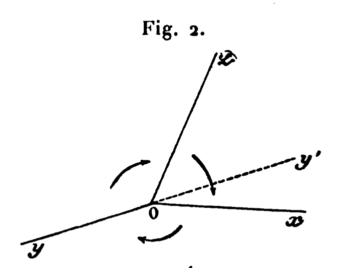
Quand la projection est orthogonale, ce théorème se traduit par l'équation

$$\overline{OC'} \times \cos\lambda = \overline{OA} \times \cos\alpha + \overline{OB} \times \cos\beta + \overline{OC} \times \cos\gamma,$$

α, β, γ, λ étant les angles de OA, OB, OC, OC' avec la direction des projections positives.

2. *Des trièdres direct et inverse.* — Supposons qu'un observateur se place le long d'une arête Ox d'un trièdre (*fig.* 2), les pieds en O, et que, pour cet observateur, le sens de la rotation qui amènerait Oy sur Oz soit le même que celui de la marche des aiguilles d'une montre (de gauche à droite); il en sera de même si l'on se place sur Oy pour voir tourner Oz vers Ox, et enfin sur Oz

Fig. 2.



pour voir tourner Ox vers Oy. On dira alors que le trièdre a un sens de rotation *direct* ou *positif;* dans le cas contraire, le trièdre est *inverse* ou *négatif :* exemple $Oxy'z$.

REMARQUES. — I. En Mécanique, le sens direct ou positif des rotations est de gauche à droite, c'est le contraire en Astronomie.

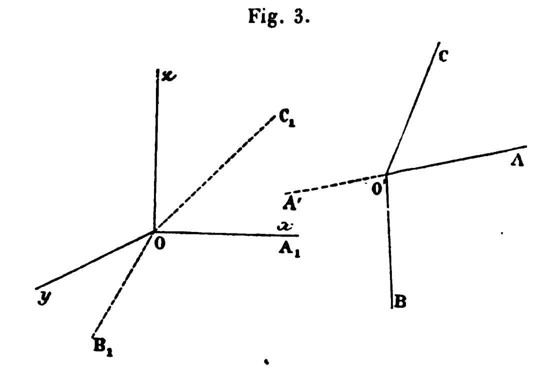
En Géométrie plane, le sens positif des rotations est toujours de Ox vers Oy.

II. Quand un trièdre O'ABC (*fig.* 3) a même sens de rotation qu'un autre trièdre $Oxyz$, on peut l'amener à coïncider avec ce dernier, en le déplaçant et le déformant d'une manière continue, mais sans qu'il cesse d'être un trièdre, c'est-à-dire sans que ses arêtes soient jamais dans un même plan.

En effet, déplaçons le trièdre O'ABC, de manière que O' vienne en O, O'A en Ox, le plan AO'B sur le plan xOy,

et de telle sorte que OC et Oz soient du même côté de ce plan. Soit $OA_1B_1C_1$ le trièdre ainsi transporté, OB_1 sera du même côté de Ox que Oy; en déformant ce trièdre de manière que OB_1 vienne d'abord en Oy, puis OC_1

Fig. 3.



en Oz, on réalisera la coïncidence sans que, dans ces déformations, le trièdre ait jamais eu ses trois arêtes dans un même plan.

3. On peut reconnaître le sens de la rotation d'un trièdre O'ABC en le comparant au trièdre direct des coordonnées rectangulaires $Oxyz$.

Soient α, β, γ; α', β', γ'; $\alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs de O'A, O'B, O'C; posons

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

et supposons que le trièdre O'ABC soit direct; si nous le transportons et le déformons de manière à établir la coïncidence avec $Oxyz$, Δ variera d'une manière continue, mais sans jamais devenir nul, car $\Delta = 0$ indiquerait que les trois arêtes sont dans un même plan; donc le déter-

minant Δ gardera un signe constant et ce signe est évidemment positif, car, quand la coïncidence est obtenue, on a

$$\begin{array}{lll} \alpha = 1, & \beta = 0, & \gamma = 0, \\ \alpha' = 0, & \beta' = 1, & \gamma' = 0, \\ \alpha'' = 0, & \beta'' = 0, & \gamma'' = 1, \end{array}$$

et par suite $\Delta = +1$. D'un autre côté, le déterminant Δ' du trièdre inverse O'A'BC est évidemment égal à $-\Delta$. D'où cette règle : suivant que le trièdre est direct ou inverse, on a $\Delta \gtrless 0$.

2. — Vitesse d'un point matériel.

4. On nomme *système invariable* un système géométrique de points qui reste toujours superposable à lui-même; les distances respectives de ses points restent, par conséquent, constamment les mêmes.

Trois points déterminent la position d'un système invariable, car tout autre point du système est déterminé par ses distances invariables et connues aux trois points considérés et par la condition que dans toutes ses positions le tétraèdre formé par ces quatre points reste superposable au tétraèdre initial.

Tout système mobile, invariable ou non, pouvant être regardé comme un système de points mobiles, il est naturel de commencer par l'étude du point matériel isolé.

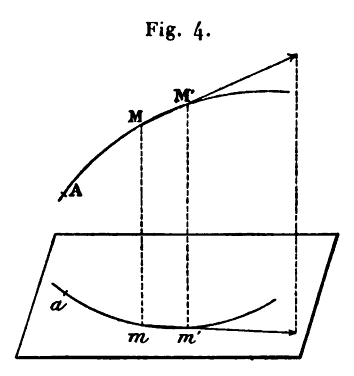
Soit M (*fig.* 4) un point décrivant une courbe, que l'on nomme sa *trajectoire,* suivant une loi donnée, de manière, par exemple, que l'arc s décrit à partir d'une origine A, soit une certaine fonction du temps, et soient M et M' ses positions aux temps t et $t + \Delta t$; on appelle grandeur de la *vitesse* du point M, à l'instant t, la

quantité

$$V = \lim \frac{\text{arc}\,MM'}{\Delta t},$$

quand Δt tend vers zéro, et l'on porte cette longueur sur la tangente à la courbe en M, dans le sens du mouvement effectif. Ce sens peut d'ailleurs n'être pas le même que

Fig. 4.



celui qui a été pris pour sens des arcs positifs, mais on peut dire, en tous cas, que *la vitesse est la grandeur géométrique* $v = \frac{ds}{dt}$, *portée sur la tangente, dans le sens des arcs croissants, mais en tenant compte de son signe*. En effet, si $v > 0$, ou $ds > 0$, le mouvement a lieu dans le sens des arcs croissants et la grandeur $V = v$ doit être portée dans le sens positif. Si $v < 0$, $ds < 0$, le mouvement a lieu dans le sens des arcs décroissants, la grandeur absolue V de la vitesse est $-v$ et elle doit être portée dans le sens des arcs décroissants, ce qui revient à porter v dans le sens des arcs croissants, en tenant compte de son signe.

5. Quand l'espace parcouru par le point mobile *croît*

proportionnellement au temps, le mouvement est dit *uniforme.* Si donc s_0 désigne l'arc de trajectoire compté à partir de l'origine A des arcs jusqu'à la position occupée par le mobile à l'époque t_0, on doit avoir par définition

$$s - s_0 = a(t - t_0),$$

d'où

$$v = \frac{ds}{dt} = a;$$

donc alors la vitesse est le rapport constant de l'espace parcouru au temps employé à le parcourir.

• 6. Théorème. — *La projection sur un axe, ou sur un plan, de la vitesse d'un point mobile, est égale à la vitesse de la projection du point sur cet axe ou sur ce plan.*

En effet, mm' étant la projection de l'arc MM′ décrit dans le Δt, la grandeur géométrique $\frac{\mathrm{MM}}{\Delta t}$ portée sur MM′ prolongé a pour projection $\frac{mm'}{\Delta t}$ portée sur la direction mm'. A la limite, on conclut que la projection de la vitesse du point M est celle du mouvement du point m, projection du point M.

7. *Projections de la vitesse en coordonnées rectangulaires.* — La vitesse du point m, projection de M sur Ox, étant $\frac{dx}{dt}$, puisque pour m, $s = x$, les projections de la vitesse de M sur les trois axes coordonnées sont respectivement

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt};$$

on en déduit

$$V^2 = \frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2}.$$

Les cosinus directeurs du sens positif de la vitesse ont pour expressions

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \qquad \cos\beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos\gamma = \frac{dz}{ds};$$

ces formules sont évidentes quand $ds > 0$, comme on le suppose toujours en Analyse, parce qu'alors la droite ds a pour projections sur les trois axes dx, dy et dz; elles sont encore vraies si $ds < 0$, puisque les trois différentielles dx, dy et dz changent de signe en même temps que ds. On pourrait en déduire les expressions précédemment trouvées, des projections de la vitesse sur les axes coordonnés; on a, en effet, pour la projection de v sur Ox

$$v\cos\alpha = \frac{ds}{dt}\cos\alpha = \frac{ds}{dt}\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt}.$$

8. *Mouvement d'un point sur un cercle.* — Soit r le rayon du cercle, dont le centre est pris pour origine; comptons les arcs croissants dans le sens où croît l'angle $\theta = xOM$, on a alors

$$\Delta s = r\Delta\theta, \qquad \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} = \omega r,$$

en posant $\omega = \frac{d\theta}{dt}$; ω, vitesse d'un point situé sur OM, à une distance du centre égale à l'unité, est la *vitesse angulaire*.

Les projections de v sur les axes Ox et Oy sont res-

pectivement

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(r\cos\theta)}{dt} = -\frac{r\sin\theta\,d\theta}{dt} = -\omega y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(r\sin\theta)}{dt} = \frac{r\cos\theta\,d\theta}{dt} = \omega x.$$

La rotation est *uniforme,* quand θ varie proportionnellement au temps

$$\theta - \theta_0 = a(t - t_0),$$

alors

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = a = \text{const.}$$

9. *Projections de la vitesse, en coordonnées polaires planes, sur le rayon vecteur et sa perpendiculaire.* — Pour projeter la vitesse sur le rayon vecteur prolongé et la perpendiculaire à ce rayon, menée dans le sens des angles croissants, il suffit de projeter sur ces directions l'arc Δs; or ces projections sont, à des infiniment petits du second ordre près, Δr et $r\Delta\theta$; donc les projections de $\frac{ds}{dt}$ sur ces deux directions sont

$$\frac{dr}{dt} = r' \qquad \text{et} \qquad r\frac{d\theta}{dt} = r\theta';$$

la première s'appelle *vitesse de glissement*, la seconde *vitesse de circulation*.

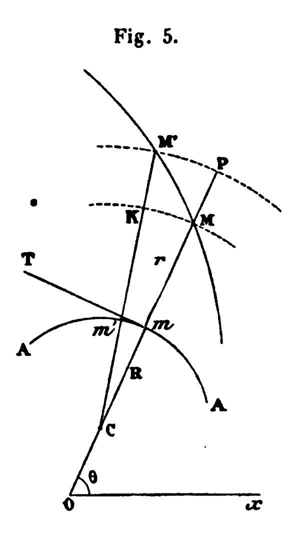
Enfin on a encore

$$V^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2} = r'^2 + r^2\theta'^2.$$

10. *Coordonnées polaires généralisées.* — Soit une

courbe fixe A (*fig.* 5); un point quelconque M du plan peut être défini par l'angle θ que fait avec l'axe fixe Ox la normale Mm menée de M à la courbe A, et par la distance $Mm = r$. Projetons la vitesse de M sur mM prolongé et sur la perpendiculaire mT; à cet effet, menons

Fig. 5.



par les deux points infiniment voisins M et M' de la trajectoire de M, des courbes parallèles à A, la projection de MM' sur mM sera $MP = \Delta r$. Pour calculer la projection MK de MM' sur mT, remarquons que le point C intersection de deux normales infiniment voisines, tend vers le centre de courbure de A, qui est aussi celui de MK; donc si R est le rayon de courbure de A

$$\text{arc } MK = (R + r)\,\Delta\theta,$$

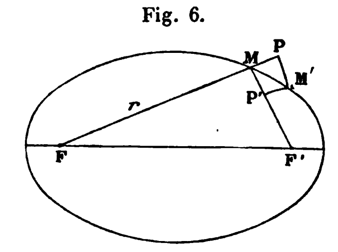
les projections de la vitesse v de M sur les deux direc-

tions rectangulaires mM et mT sont par suite

$$\frac{dr}{dt} \quad \text{et} \quad (\mathrm{R}+r)\frac{d\theta}{dt}.$$

11. *Méthode de Roberval* (XVIIe siècle). — Cette méthode, qui a pour objet le tracé des tangentes aux courbes, a précédé la découverte du Calcul infinitésimal. La tangente à une courbe n'est autre chose que la direction de la vitesse d'un mobile assujetti à décrire cette courbe; si donc on connaît les vitesses des projections du point sur

Fig. 6.



deux droites, ou simplement des quantités proportionnelles, on construira facilement la tangente à la courbe en question. Tel est le principe de la méthode de Roberval, que nous allons mieux faire connaître en l'appliquant à quelques exemples.

1° Soient M un point mobile sur une ellipse (*fig.* 6), r et r' les rayons vecteurs de ce point, issus des foyers F et F'; les projections de MM' sur ces rayons vecteurs sont $\mathrm{MP} = dr$ et $-\mathrm{MP}' = dr'$, donc les projections de la vitesse sur FM et MF' sont $\frac{dr}{dt}$ et $-\frac{dr'}{dt}$. Or, de la relation

$$r + r' = 2a$$

on déduit $dr = -dr'$; donc les projections de la vitesse

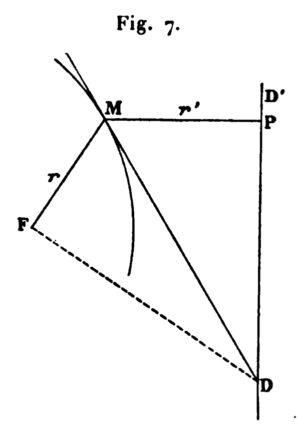
sur l'un des rayons vecteurs et le prolongement de l'autre, sont égales, d'où la construction connue de la tangente à l'ellipse.

2° Considérons une conique ayant F pour foyer et DD' pour directrice correspondante (*fig.* 7), on a

$$\frac{r}{r'} = \frac{c}{a} = e, \qquad r = er', \qquad \frac{dr}{dt} = e\,\frac{dr'}{dt}.$$

Concevons un point M décrivant la courbe, les projections

Fig. 7.



de la vitesse sur MF et MP sont $-\frac{dr}{dt}$ et $-\frac{dr'}{dt}$ et leur rapport est $e = \frac{r}{r'}$, donc en prenant sur MF et MP des longueurs proportionnelles à r et r', par exemple $\mathrm{MF} = r$ et $\mathrm{MP} = r'$, puis élevant en F et P des perpendiculaires à MF et MP, leur point d'intersection D appartiendra à la tangente.

On retrouve ainsi cette propriété, que du foyer F d'une conique, on voit sous un angle droit la portion MD de

la tangente comprise entre le point de contact et la directrice.

3° Plus généralement, on peut obtenir la tangente à la courbe $f(r, r') = 0$, où r et r' désignent les distances d'un point quelconque M à deux pôles ou à deux courbes fixes. On a, en effet

$$\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial r'} dr' = 0, \qquad \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{dr'}{dt}} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial r'}}{\frac{\partial f}{\partial r}};$$

donc les longueurs $-\frac{\partial f}{\partial r'}$ et $\frac{\partial f}{\partial r}$ prises sur les rayons vecteurs r et r', à partir de M, seront les projections d'un point de la tangente.

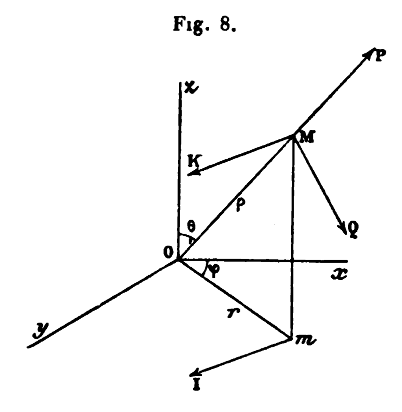
12. *Projections de la vitesse en coordonnées cylindriques ou semi-polaires.* — Les coordonnées semi-polaires d'un point M sont le z de ce point et les coordonnées polaires r et θ de sa projection m sur xOy,

La projection de la vitesse de M sur Oz est $\frac{dz}{dt}$. Sur Om et sa perpendiculaire menée dans le sens où θ croît, les projections de la vitesse seront $\frac{dr}{dt}$ et $r\frac{d\theta}{dt}$, puisque la vitesse de m est la projection de la vitesse de M sur xOy.

13. *Projections de la vitesse en coordonnées sphériques ou polaires.* — Soient ρ, θ et φ les coordonnées polaires du point M (*fig.* 8); ds est la diagonale d'un parallélipipède rectangle dont les côtés sont $d\rho$ sur OM, $\rho\, d\theta$ sur la perpendiculaire à OM, dans le plan azimutal zOM, et dans le sens dans lequel θ croît et enfin $\rho \sin\theta\, d\varphi$ sur la perpendiculaire au plan zOM, dans le

sens des angles φ croissants. Donc les projections de la

Fig. 8.



vitesse $\frac{ds}{dt}$ sur ces trois directions rectangulaires sont

$$\frac{d\rho}{dt}, \qquad \rho\frac{d\theta}{dt} \quad \text{et} \quad \rho\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt}.$$

14. *Composantes de la vitesse en coordonnées curvilignes.* — Soit le système triple

$$f_1(x, y, z) = \rho_1, \qquad f_2(x, y, z) = \rho_2 \qquad f_3(x, y, z) = \rho_3,$$

qui définit un point M (x, y, z) en fonction des trois paramètres ρ_1, ρ_2, ρ_3; ces paramètres sont les coordonnées curvilignes de M, et ce point est à l'intersection des trois surfaces correspondantes. Cherchons les *composantes* de la vitesse de M, sur les trois tangentes aux courbes d'intersection de ces surfaces deux à deux, c'est-à-dire les longueurs qui, portées sur ces tangentes, ont pour somme géométrique la vitesse de M.

Soient α_1, β_1, γ_1 les cosinus directeurs de la tangente MA à la courbe intersection des surfaces ρ_2 et ρ_3, et ainsi

de suite; x, y, z étant regardées comme fonctions de ρ_1, ρ_2 et ρ_3, on a

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial x}{\partial\rho_1}\frac{d\rho_1}{dt}+\frac{\partial x}{\partial\rho_2}\frac{d\rho_2}{dt}+\frac{\partial x}{\partial\rho_3}\frac{d\rho_3}{dt}=\sum\frac{\partial x}{\partial\rho}\frac{d\rho}{dt},$$

$$=\sum\frac{\dfrac{\partial x}{\partial\rho}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\dfrac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2}}\times\left[\frac{d\rho}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2}\right]$$

$$=\sum\alpha\frac{d\rho}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2}.$$

Et de même

$$\frac{dy}{dt}=\sum\beta\frac{d\rho}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2},$$

$$\frac{dz}{dt}=\sum\gamma\frac{d\rho}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho}\right)^2}.$$

Donc, si l'on porte sur MA la longueur

$$\frac{d\rho_1}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho_1}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho_1}\right)^2},$$

sur MB

$$\frac{d\rho_2}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho_2}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho_2}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho_2}\right)^2},$$

et enfin sur MC

$$\frac{d\rho_3}{dt}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\rho_3}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\rho_3}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\rho_3}\right)^2},$$

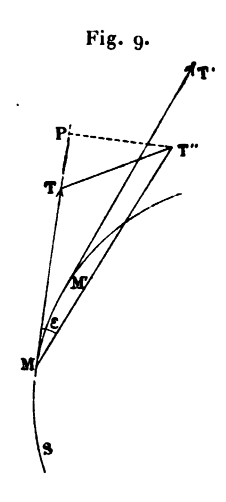
la somme géométrique de ces trois longueurs aura les

mêmes projections que la vitesse sur les trois axes Ox, Oy et Oz; donc ces trois longueurs sont les composantes de la vitesse.

3. — Accélération dans le mouvement d'un point matériel.

15. Soient S (*fig.* 9) la trajectoire d'un point, M et M′ ses positions aux époques t et $t + \Delta t$, MT sa vitesse en

Fig. 9.



M, M′T′ sa vitesse en M′; par M menons une droite MT″ égale et parallèle à M′T′ et de même sens, et joignons TT″. On appelle *accélération* du mobile en M, la limite d'une parallèle menée par M à TT″, et de longueur égale à $\lim \frac{TT''}{\Delta t}$, le sens de cette droite étant dirigé de T vers T″.

16. *Projections de l'accélération en coordonnées rectilignes rectangulaires.* — Soient x, y, z les coor-

données de M; les projections de la vitesse MT sont

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

et celles de la vitesse M′T′

$$\frac{dx}{dt} + \Delta\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} + \Delta\frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt} + \Delta\frac{dz}{dt};$$

donc la longueur TT″ qui est l'accroissement géométrique de la vitesse de M a pour projections

$$\Delta\frac{dx}{dt}, \quad \Delta\frac{dy}{dt}, \quad \Delta\frac{dz}{dt}.$$

Divisant ces expressions par Δt et passant à la limite, on a pour les projections de l'accélération γ

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2};$$

elles déterminent entièrement cette droite qui, par définition, part du point M.

L'accélération γ est quelquefois appelée *variation* ou *dérivée géométrique* de la vitesse; on appelle alors *différentielle géométrique de la vitesse* ou *accélération élémentaire*, le produit $\gamma\, dt$, de même que la vitesse élémentaire est $v\, dt$.

17. Théorème. — *La projection sur une droite ou sur un plan de l'accélération d'un point mobile est l'accélération de la projection du point mobile sur la droite ou sur le plan.*

On démontre ce théorème en projetant le triangle MTT″ sur la droite ou le plan, les projections de MT et MT″ représentant les vitesses de la projection du point.

Dans un mouvement rectiligne suivant Ox, l'accélération est $\frac{d^2x}{dt^2}$; elle est nulle si ce mouvement est uniforme, mais elle ne l'est pas dans un mouvement curviligne uniforme.

18. *Projection de l'accélération sur la tangente et la normale principale à la trajectoire.* — Soient α, β, γ les angles avec les axes coordonnées de la tangente à la trajectoire, dans le sens des arcs croissants, λ, μ, ν les angles que fait avec les mêmes axes le normale principale, dirigée du point M vers le centre de courbure; on a

$$\frac{dx}{dt} = v \cos\alpha,$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + v\frac{d\cos\alpha}{dt};$$

mais, en désignant par R la valeur absolue du rayon de courbure, on a

$$\cos\lambda = \mathrm{R}\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds} = \mathrm{R}\frac{d\cos\alpha}{ds},$$

d'où

$$\frac{d\cos\alpha}{dt} = \frac{\cos\lambda}{\mathrm{R}}\frac{ds}{dt} = v\frac{\cos\lambda}{\mathrm{R}}$$

et enfin

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{v^2}{\mathrm{R}}\cos\lambda,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\beta + \frac{v^2}{\mathrm{R}}\cos\mu,$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\gamma + \frac{v^2}{\mathrm{R}}\cos\nu.$$

Donc l'accélération est la somme géométrique de deux

droites, l'une $\frac{dv}{dt}$ portée sur la tangente, dans le sens des arcs croissants, en tenant compte de son signe, et l'autre $\frac{v^2}{R}$ dont la direction est celle de la normale principale; il en résulte que l'accélération est située dans le plan osculateur de la trajectoire.

La première composante $\frac{dv}{dt}$ est l'*accélération tangentielle* et la seconde l'*accélération centripète* ou *normale*. Newton, dans ses « Principes 1687 », a été conduit à la notion de ces composantes près de cent ans avant la décomposition de l'accélération suivant trois axes, due à Maclaurin.

Les résultats qui précèdent peuvent être établis par la Géométrie. L'accélération est, par définition, dans le plan MTT″, qui contient la tangente MT et une parallèle à la tangente infiniment voisine, elle est donc dans le plan osculateur. Menons maintenant T″P perpendiculaire à la tangente MT, TT″ est la résultante de TP et PT″, donc $\frac{TT''}{dt}$ sera la résultante de $\frac{TP}{dt}$ et $\frac{PT''}{dt}$. Or, en appelant ε l'angle de contingence de la trajectoire

$$TP = MT'' \cos\varepsilon - MT = MT'' - MT = dv,$$
$$\frac{TP}{dt} = \frac{dv}{dt};$$

on a ensuite

$$PT'' = (v + dv)\sin\varepsilon = v\varepsilon,$$
$$\frac{PT''}{dt} = v\frac{\varepsilon}{dt} = v\frac{\varepsilon}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{R},$$

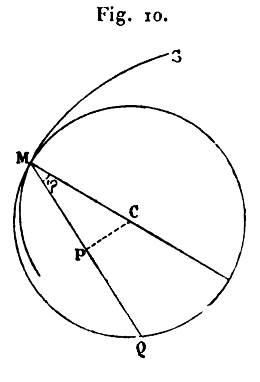
et l'on reconnaît ainsi que l'*accélération proprement dite* ou *totale* est la résultante des deux grandeurs $\frac{dv}{dt}$ et

$\frac{v^2}{R}$ portées l'une suivant la tangente, l'autre dans le sens du rayon de courbure.

19. Remarques. — I. Si le mouvement est uniforme, l'accélération tangentielle est nulle; l'accélération totale est centripète.

II. Quand la trajectoire présente un point d'inflexion, son rayon de courbure est infini et l'accélération normale est nulle en ce point. Réciproquement, si l'accélération normale est nulle, la trajectoire présente une inflexion au

Fig. 10.



point correspondant, à moins que la vitesse passant par zéro, le mobile ne rebrousse chemin.

III. Quand un point se meut sur un cercle, la vitesse $v = r\omega = r\frac{d\theta}{dt}$, les composantes de l'accélération sont $r\frac{d\omega}{dt} = r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ suivant la tangente et $\frac{v^2}{r} = r\omega^2 = r\frac{d\theta^2}{dt^2}$ suivant le rayon.

IV. L'accélération totale, dans un mouvement quelconque, est égale au carré de la vitesse divisé par la moitié

de la corde MQ (*fig.* 10) qu'intercepte le cercle de courbure sur la direction de cette accélération.

En effet, l'accélération centripète $\frac{v^2}{R}$ a aussi pour valeur $\gamma \cos\varphi$, d'où

$$\gamma = \frac{v^2}{R\cos\varphi} = \frac{v^2}{MP} = \frac{v^2}{\frac{1}{2}MQ}.$$

20. *Application au mouvement d'un point qui se déplace sur une hélice quelconque avec une vitesse constante.* — Supposons qu'un point M décrive une hélice d'un mouvement uniforme avec une vitesse constante V, prenons Oz parallèle aux génératrices du cylindre, et soient X, Y, Z les coordonnées de M, x, y, z celles de sa projection m sur le plan des xy; on aura, s étant l'arc d'hélice compté à partir de sa trace sur le plan xOy,

$$x = X = \varphi(s),$$
$$y = Y = \psi(s),$$
$$z = 0, \quad Z = Ks.$$

Cherchons la vitesse v de m :

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(s)\frac{ds}{dt} = V\varphi'(s), \qquad \frac{dy}{dt} = V\psi'(s), \qquad \frac{dz}{dt} = 0,$$

d'ailleurs

$$\left(\frac{dX}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dY}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dZ}{ds}\right)^2 = 1,$$

d'où

$$\varphi'^2(s) + \psi'^2(s) + K^2 = 1$$

et

$$v^2 = V^2(1 - K^2).$$

Donc le rapport des vitesses de M et m est constant et comme V est constant, v le sera aussi.

Les accélérations de M et m sont égales et parallèles, puisque

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2X}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2Y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2Z}{dt^2} = 0;$$

elles sont aussi normales, puisque V et v sont constantes, on en conclut que la normale principale à l'hélice est normale au cylindre, ce que l'on pouvait prévoir, puisque l'hélice est une ligne géodésique.

L'accélération normale de M est $\frac{V^2}{R}$, celle de m est $\frac{v^2}{r}$; or elles sont égales, on en déduit

$$\frac{R}{r} = \frac{V^2}{v^2} = \frac{1}{1 - K^2},$$

ce qui montre que le rayon de courbure de l'hélice en un point quelconque est proportionnel au rayon de courbure de la section droite au point correspondant.

21. *Projections de l'accélération en coordonnées polaires dans le mouvement plan.* — Nous ferons les projections comme pour la vitesse, suivant le rayon vecteur et une perpendiculaire à ce rayon, dans le sens des arcs croissants.

Pour avoir la première composante A, nous projetterons sur le rayon les deux composantes rectangulaires

$$\frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{et} \quad \frac{d^2y}{dt^2},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
A &= \frac{d^2x}{dt^2}\cos\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\sin\theta = \frac{1}{r}\left(x\frac{d^2x}{dt^2} + y\frac{d^2y}{dt^2}\right) \\
&= \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) - \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2}\right] \\
&= \frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r\frac{dr}{dt}\right) - \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2}\right] \\
&= \frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2} = r'' - r\theta'^2.
\end{aligned}$$

On trouve de même pour la seconde composante

$$\begin{aligned}
B &= \frac{d^2x}{dt^2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{d^2y}{ds^2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\
&= -\frac{d^2x}{dt^2}\sin\theta + \frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta = \frac{1}{r}\left(x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right) \\
&= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) \\
&= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 2\,r'\theta' + r\theta''.
\end{aligned}$$

22. *Projections de l'accélération en coordonnées semi-polaires.* — La projection de l'accélération du point M sur Oz est toujours $\frac{d^2z}{dt^2}$. Quant aux projections suivant le rayon vecteur Om et sa perpendiculaire dans le plan xOy, elles sont respectivement

$$r'' - r\theta'^2, \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta'),$$

car les projections de l'accélération de M sur ces deux directions sont celles de l'accélération de m.

23. *Projections de l'accélération en coordonnées*

polaires. — Cherchons les composantes A, B, C de l'accélération γ suivant le prolongement MP du rayon vecteur OM (*fig.* 8), la perpendiculaire MQ dans le plan azimutal zOM, menée dans le sens dans lequel θ croît, et la perpendiculaire MK au plan zOM dans le sens des arcs φ croissants. A cet effet, considérons d'abord le point M comme ayant pour coordonnées semi-polaires

$$z = \rho\cos\theta, \qquad Om = r = \rho\sin\theta \text{ et } \varphi;$$

d'après ce qui précède, γ aura pour projections

$$\begin{aligned} &\text{sur } Oz \; \ldots\ldots \; z'', \\ &\text{sur } Om \; \ldots\ldots \; r'' - r\varphi'^2, \\ &\text{sur MK } \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\varphi') = \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{d}{dt}(\varphi'\rho^2\sin^2\theta). \end{aligned}$$

Il reste à composer, suivant MP et MQ, les projections de γ sur Oz et Om; prenons d'abord z'' et r'', ce sont les projections suivant les deux axes rectangulaires Oz et Om de l'accélération de la projection de M, sur le plan zOM supposé fixe; donc, d'après le calcul de l'accélération en coordonnées polaires planes, on peut remplacer ces deux composantes par

$$\rho'' - \rho\theta'^2 \text{ suivant MP}$$

$$\text{et } \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\theta') \text{ suivant MQ.}$$

Il reste encore $-r\varphi'^2$ porté sur Om, dont les composantes suivant MP et MQ sont respectivement

$$-r\varphi'^2\sin\theta = -\rho\varphi'^2\sin^2\theta,$$
$$-r\varphi'^2\cos\theta = -\rho\varphi'^2\sin\theta\cos\theta.$$

En résumé, γ est la somme géométrique des trois com-

posantes rectangulaires

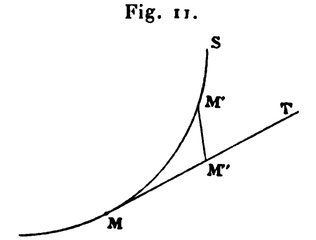
$$A = \rho'' - \rho\theta'^2 - \rho\varphi'^2 \sin^2\theta,$$

$$B = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\theta') - \rho\varphi'^2 \sin\theta\cos\theta,$$

$$C = \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{d}{dt}(\varphi'\rho^2\sin^2\theta).$$

24. *Autre définition de l'accélération.* — Soient M et M' (*fig.* 11) les positions du mobile aux époques t et

Fig. 11.



$t + \Delta t$ et v sa vitesse au temps t; portons sur la tangente MT à la trajectoire la longueur absolue $MM'' = V\Delta t$ dans le sens du mouvement, ce qui revient à prendre $v\Delta t$ dans le sens positif, et joignons M''M'. *L'accélération* γ *est la limite de la grandeur géométrique* $\frac{2\,M''M'}{(\Delta t)^2}$ *dirigée de* M'' *vers* M'.

En effet les coordonnées de M' sont

$$x + \Delta x = x + \frac{dx}{dt}\Delta t + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{(\Delta t)^2}{1.2} + \frac{d^3x}{dt^3}\frac{(\Delta t)^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$y + \Delta y = \ldots, \qquad z + \Delta z = \ldots,$$

et celles de M'', en vertu de la relation $MM'' = v\Delta t$,

$$x + \frac{dx}{dt}\Delta t, \qquad y + \frac{dy}{dt}\Delta t, \qquad z + \frac{dz}{dt}\Delta t;$$

la projection de M″M′ sur Ox est alors

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{(\Delta t)^2}{1.2}+\frac{d^3x}{dt^3}\frac{(\Delta t)^3}{1.2.3}+\dots,$$

donc celle de $\frac{2\,\mathrm{M''M'}}{(\Delta t)^2}$ est

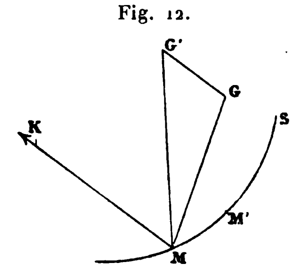
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{\Delta t}{3}\left(\frac{d^3x}{dt^3}+\dots\right)$$

et à la limite $\frac{d^2x}{dt^2}$, c'est-à-dire la projection de γ.

La droite M″M′ infiniment petite du deuxième ordre, a reçu de Duhamel le nom de *déviation*.

25. *Accélérations de divers ordres.* — Soient M et M′

Fig. 12.



deux positions infiniment voisines du mobile, MG (*fig.* 12) l'accélération du mobile en M, MG′ une droite égale et parallèle à son accélération en M′; menons par M une droite MK parallèle à GG′ et ayant pour longueur $\frac{\mathrm{GG'}}{\Delta t}$, à la limite, MK devient l'*accélération du deuxième ordre* ou *suraccélération* (¹).

(¹) Sommoff, *Mémoire sur les accélérations de divers ordres.* Académie de Saint-Pétersbourg.

On verrait, comme pour l'accélération du premier ordre, que la suraccélération a pour projections sur les axes coordonnés

$$\frac{d^3x}{dt^3}, \quad \frac{d^3y}{dt^3}, \quad \frac{d^3z}{dt^3},$$

et qu'en général l'accélération d'ordre n a pour composantes

$$\frac{d^{n+1}x}{dt^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}y}{dt^{n+1}}, \quad \frac{d^{n+1}z}{dt^{n+1}}.$$

Cherchons les projections A, B, C de la suraccélération sur la tangente, la normale principale et la binormale; soient α, γ, ξ les angles de ces droites avec Ox, on a

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\cos\alpha + \frac{v^2}{R}\cos\lambda,$$

d'où

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d^2v}{dt^2}\cos\alpha + \frac{dv}{dt}\frac{d\cos\alpha}{dt} + \cos\lambda\,\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{R}\right) + \frac{v^2}{R}\frac{d\cos\lambda}{dt},$$

ce que l'on peut écrire, en vertu des formules de Frenet, T étant le rayon de torsion

$$\frac{d^3x}{dt^3} = \frac{d^2v}{dt^2}\cos\alpha + \left[\frac{v}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{R}\right)\right]\cos\lambda \\ - \frac{v^3}{R}\left(\frac{\cos\alpha}{R} + \frac{\cos\xi}{T}\right).$$

Donc la suraccélération est la somme géométrique des trois grandeurs

$$A = \frac{d^2v}{dt^2} - \frac{v^3}{R^2}, \qquad B = \frac{v}{R}\frac{dv}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{R}\right), \qquad C = -\frac{v^3}{RT}.$$

4. — Des accélérations centrales.

26. *Mouvement d'un point dont la direction de l'accélération passe par un point fixe.* — Si l'on prend pour origine le point par lequel l'accélération passe constamment, on a les équations

$$\frac{\frac{d^2x}{dt^2}}{x} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}}{y} = \frac{\frac{d^2z}{dt^2}}{z},$$

d'où

$$y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2} = 0, \qquad z\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2z}{dt^2} = 0,$$

$$x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2} = 0,$$

et en intégrant,

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = a, \qquad z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = b, \qquad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = c,$$

et, par suite,

$$ax + by + cz = 0,$$

c'est-à-dire que la *trajectoire est une courbe plane passant par le point fixe.* Prenant ce plan pour plan des xy et exprimant que la composante de l'accélération suivant la perpendiculaire au rayon vecteur est nulle, on a l'équation

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0,$$

d'où

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{const} = c;$$

or A étant l'aire décrite par le rayon vecteur, on a

$$r^2\, d\theta = 2\, dA = c\, dt,$$

et en intégrant,

$$A = \frac{c}{2}(t - t_0).$$

Donc *les aires décrites par le rayon vecteur sont proportionnelles au temps.*

La constante c est le double de la *vitesse aréolaire* ou de l'aire décrite dans l'unité de temps; c'est aussi le *moment de la vitesse*, c'est-à-dire le produit de la vitesse V à un instant quelconque, par sa distance p à l'origine. car $Vp = \frac{p\,ds}{dt}$, or $p\,ds$ représente le double de l'aire décrite dans le temps dt ou $c\,dt$, d'où $Vp = c$.

Enfin l'accélération étant centrale se réduit à sa composante suivant le rayon vecteur

$$\gamma = \frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta^2}{dt^2};$$

éliminons le temps à l'aide de l'équation

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2},$$

on a successivement

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -c\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -c\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\frac{d\theta}{dt} = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2},$$

d'où l'expression de l'accélération, que l'on écrit ordinairement en la portant du mobile vers le point fixe pris

pour origine,

$$\gamma = \frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\right).$$

C'est la *formule de Binet.*

27. *Mouvement d'un point sur une ellipse, l'accélération passant constamment par un foyer.*

L'accélération étant centrale sera donnée par la formule de Binet; or, si l'on prend pour axe polaire la droite joignant le foyer au sommet le plus voisin de l'ellipse, on a

$$r = \frac{\frac{b^2}{a}}{1 + \frac{c}{a}\cos\theta} = \frac{p}{1 + e\cos\theta};$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e\cos\theta}{p}, \qquad \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = -\frac{e\cos\theta}{p}, \qquad \gamma = \frac{c^2}{pr^2}.$$

L'accélération est inversement proportionnelle au carré de la distance.

On peut mettre l'expression de l'accélération sous une autre forme, en introduisant le moyen mouvement n. T étant la durée de la révolution,

$$c = 2\frac{\pi ab}{T} = nab = na^2\sqrt{1 - e^2}$$

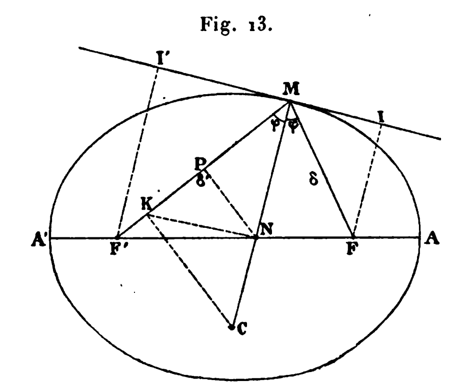
$$p = \frac{b^2}{a} = a(1 - e^2), \qquad \frac{c^2}{p} = n^2a^3;$$

$$\gamma = \frac{n^2a^3}{r^2}.$$

La valeur de l'accélération précédemment trouvée con-

duit à une expression du rayon de courbure de l'ellipse; soit φ l'angle de la normale MN = N (*fig.* 13), avec le

Fig. 13.



rayon vecteur, la composante de γ suivant la normale est

$$\frac{v^2}{R} = \gamma \cos\varphi = \frac{c^2}{p\delta^2}\cos\varphi;$$

or c est le moment de v,

$$c = v \times FI = v\delta\cos\varphi,$$

d'où éliminant v,

$$\frac{c^2}{R\delta^2\cos^2\varphi} = \frac{c^2}{p\delta^2}\cos\varphi, \qquad R = \frac{p}{\cos^3\varphi} = \frac{b^2}{a\cos^3\varphi}.$$

En vertu de la relation

$$b^2 = FI \times F'I' = \delta\delta'\cos^2\varphi,$$

on a encore

$$R = \frac{\delta\delta'}{a\cos\varphi};$$

or, de la relation

$$\frac{\delta}{\delta'} = \frac{FN}{F'N},$$

on tire

$$\frac{\delta^2}{\delta'^2} = \frac{\delta^2 + N^2 - 2N\delta\cos\varphi}{\delta'^2 + N^2 - 2N\delta'\cos\varphi} = \frac{N - 2\delta\cos\varphi}{N - 2\delta'\cos\varphi},$$

$$N(\delta^2 - \delta'^2) = 2\delta\delta'(\delta - \delta')\cos\varphi, \qquad Na = \delta\delta'\cos\varphi,$$

et enfin

$$R = \frac{N}{\cos^2\varphi},$$

ce qui fournit une construction simple du rayon de courbure MC.

La comparaison des deux expressions que nous avons trouvées pour le rayon de courbure de l'ellipse, montre que la projection MP de la normale MN sur le rayon vecteur est constante et égale au paramètre $p = \frac{b^2}{a}$; c'est une propriété caractéristique des coniques.

28. *Mouvement sur une ellipse d'un point dont l'accélération est dirigée vers le centre.* — Considérons l'ellipse comme projection du cercle de rayon a, et soit M_1 le point du cercle qui se projette en M sur l'ellipse; l'accélération de M_1 passe constamment par le centre O, puisqu'elle a pour projection celle de M. Il en résulte que la composante tangentielle $a\frac{d\omega}{dt}$ de l'accélération de M_1 est nulle, ω est constant et l'accélération de M_1 dirigée suivant M_1O a pour expression $\overline{M_1O} \times \omega^2$; sa projection a donc pour valeur

$$\omega^2 \times \text{proj. de } M_1O = \omega^2 \times \overline{MO} = \omega^2 r.$$

L'accélération est directement proportionnelle à la distance du mobile au centre de l'ellipse.

En outre

$$xOM_1 = \omega t$$

en comptant le temps depuis le passage du mobile au sommet A, d'où pour les coordonnées du point M_1

$$x_1 = a\cos\omega t, \qquad y_1 = a\sin\omega t,$$

et pour celles du point M

$$x = a\cos\omega t, \qquad y = b\sin\omega t.$$

On arrive aisément aux résultats précédents en partant de la loi des aires. L'ellipse ayant pour équations

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi,$$

on a pour le double de la vitesse aréolaire

$$c = x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = ab\frac{d\varphi}{dt}, \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{ab} = \text{const} = \omega,$$

$$\varphi = \omega t,$$

d'où pour la loi du mouvement

$$x = a\cos\omega t, \qquad y = b\sin\omega t.$$

D'ailleurs

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma\cos\theta = \gamma\frac{x}{r},$$

ce qui donne

$$-a\omega^2\cos\omega t = \gamma\frac{a\cos\omega t}{r}, \qquad \gamma = -\omega^2 r.$$

La formule de Binet conduit plus péniblement au même résultat.

CHAPITRE II.

MOUVEMENT PLAN D'UN SYSTÈME INVARIABLE.

1. — Généralités sur le mouvement des systèmes.

29. Un système de points étant en mouvement relativement au trièdre invariable de trois axes mobiles AX, AY, AZ, le mouvement absolu du système sera connu si celui de ce trièdre est défini par rapport à trois axes fixes Ox, Oy, Oz. Car, supposons qu'on puisse connaître à chaque instant les coordonnées a, b, c du point mobile A, et les neuf cosinus directeurs α, β, γ, α', β', γ', $\alpha'', \beta'', \gamma''$ des axes X, Y, Z par rapport au système rectangulaire $Oxyz$, la position d'un point M ayant pour coordonnées X, Y, Z, dans le système mobile sera donnée au moyen des formules de transformation

$$x = a + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,$$
$$y = b + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z,$$
$$z = c + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z$$

où x, y, z sont les coordonnées *absolues* de M, X, Y, Z ses coordonnées *relatives*.

Si les coordonnées X, Y, Z sont constantes, le point M est fixe dans le système mobile; si elles varient, le point M est mobile, c'est-à-dire en *mouvement relatif*, par rapport au système entraîné.

30. *Mouvement d'un système invariable.* — Supposons chaque point M fixe dans le système mobile, ce qui revient à admettre que le système en mouvement est invariable et que les axes mobiles lui sont invariablement liés. Nous verrons que tout mouvement d'un tel système se ramène à deux autres, translation et rotation, que nous allons d'abord définir.

1° *Translation.* Un système est animé d'un mouvement de translation si, dans deux positions quelconques du système, les droites AA′, BB′, CC′, ..., qui joignent les deux positions d'un même point sont toutes égales, parallèles et de même sens.

Dans un tel mouvement, toute droite AB se déplace parallèlement à elle-même; il en est de même de tout plan ABC.

Tous les points sont animés à un instant quelconque d'une vitesse commune, puisque $v_A = \lim \frac{AA'}{\Delta t}$; il en résulte que l'accélération est aussi la même pour tous les points. Enfin, comme les trajectoires de tous les points sont des courbes identiques, le mouvement d'un système en translation est complètement défini quand on connaît celui de l'un de ses points.

2° *Rotation.* Un système invariable est animé d'un mouvement de rotation quand deux points et par suite une droite du système restent fixes, les autres points étant en mouvement. Proposons-nous de rechercher les composantes de la vitesse d'un point quelconque de ce système.

Supposons que l'on ait pris l'axe de rotation pour axe des z; un point M décrit un cercle dont le plan est perpendiculaire à l'axe de rotation, et dont le centre O_1 est sur cet axe, car le point O_1 est fixe, l'angle MO_1O est égal à 90° et la distance $O_1M = r$ est constante; la pro-

jection de sa vitesse sur Oz est donc nulle, $v_z' = 0$. Quant aux projections de v sur Ox et Oy, ce sont celles du point m projection de M sur le plan xOy; or m décrit un cercle de centre O et de rayon r, sa vitesse est $r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$ et ses projections sont

$$v_x = -\omega y, \qquad v_y = \omega x.$$

Remarquons que ω est à chaque instant commun à tous les points du système, car soient θ et θ_1 les angles azimutaux qui correspondent à M et M_1, le système étant invariable,

$$\theta - \theta_1 = \text{const.}, \qquad \frac{d\theta}{dt} - \frac{d\theta_1}{dt} = 0, \qquad \omega = \omega_1.$$

On peut représenter symboliquement une rotation en convenant de porter sur l'axe de rotation, à partir d'un point quelconque O de cet axe, une longueur OA égale à la valeur absolue de ω, dans un sens tel qu'un observateur ayant les pieds en O et la tête en A voie tourner chaque point en vertu de la rotation commune dans le sens positif, c'est-à-dire devant lui, de sa gauche vers sa droite. Une rotation est parfaitement définie quand on donne la quantité géométrique OA qui la représente, car on connaît ainsi l'axe, le sens et la grandeur de la rotation.

Calculons maintenant les composantes de la vitesse quand l'axe de rotation est une droite quelconque OA issue de l'origine O et dont nous représenterons les cosinus directeurs par α, β, γ. Prenons pour système intermédiaire un système rectangulaire OXYZ, direct comme le proposé $Oxyz$ et dans lequel on choisit pour axe des Z l'axe OA; soient $\alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$ les cosinus directeurs de OX et OY. Nous établirons d'abord les trois relations

analytiques suivantes :

$$\alpha = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'', \qquad \beta = \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'', \qquad \gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha''.$$

On a, en exprimant que OZ est perpendiculaire à OX et OY,

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0, \qquad \alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0,$$

d'où

$$\frac{\alpha}{\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''} = \frac{\beta}{\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma''} = \frac{\gamma}{\alpha'\beta'' - \beta'\alpha''}$$

$$= \pm \frac{1}{\sqrt{\Sigma(\beta'\gamma'' - \gamma'\beta'')^2}} = \pm \frac{1}{\sin XOY} = \pm 1;$$

or, les rapports proposés sont aussi égaux à

$$\frac{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix}$$

et $\Delta > 0$, donc ils sont égaux à $+1$, ainsi que Δ, et l'on a bien les relations précédemment écrites.

Cela posé, par rapport aux axes OXYZ, les composantes de la vitesse d'un point X, Y, Z sont

$$v_X = -\omega Y, \qquad v_Y = \omega X, \qquad v_Z = 0;$$

revenons aux anciens axes, on a, par le théorème des projections appliqué à la vitesse du point considéré,

$$v_x = \alpha' v_X + \alpha'' v_Y = (\alpha'' X - \alpha' Y)\,\omega,$$
$$v_y = \beta' v_X + \beta'' v_Y = (\beta'' X - \beta' Y)\,\omega,$$
$$v_z = \gamma' v_X + \gamma'' v_Y = (\gamma'' X - \gamma' Y)\,\omega,$$

d'ailleurs

$$X = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z,$$
$$Y = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z,$$

d'où

$$\begin{aligned} v_x &= \omega\,[\alpha''(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z) - \alpha'(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z)] \\ &= \omega\,[z(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') - y(\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')] = (\beta z - \gamma y)\,\omega. \end{aligned}$$

Or, soient p, q, r les projections de l'axe de rotation $OA = \omega$ sur les axes fixes, on a

$$p = \omega\alpha, \qquad q = \omega\beta, \qquad r = \omega\gamma,$$

et, par suite,

$$v_x = qz - ry, \qquad v_y = rx - pz, \qquad v_z = py - qx.$$

31. *Mouvement relatif d'un point.* — Soit un point M mobile par rapport au système de comparaison AXYZ ou Σ, animé lui-même d'un certain mouvement qu'on appelle *mouvement d'entraînement.* Le point M par rapport au système fixe $Oxyz$ décrit dans l'espace une certaine courbe, c'est sa *trajectoire absolue*; rapporté aux axes AXYZ considérés comme fixes, il décrit une autre courbe qui est sa *trajectoire relative.*

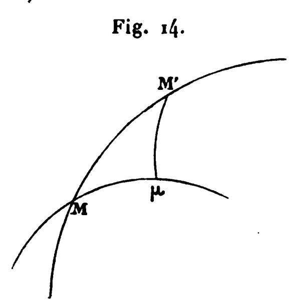
On appelle *vitesse absolue* et *vitesse relative* de M, les vitesses de ce point dans son mouvement absolu et dans son mouvement relatif; enfin on désigne sous le nom de *vitesse d'entraînement* ou *vitesse du point coïncident* la vitesse qu'aurait M en vertu du seul mouvement d'entraînement, c'est-à-dire la vitesse que possède à l'instant considéré, un point fixé au système AXYZ et coïncidant alors avec M.

32. Théorème. — *La vitesse absolue d'un point est la somme géométrique de la vitesse d'entraînement et de la vitesse relative de ce point.*

Soient Σ et Σ′ deux positions infiniment voisines du sys-

tème de comparaison, MM′ l'arc de trajectoire absolue, $M\mu$ l'arc décrit par le point coïncident (*fig.* 14) ou l'arc qu'aurait décrit M s'il était en repos relatif, l'arc décrit

Fig. 14.



dans le mouvement relatif passera par les points μ et M′; or on a, en prenant les cordes,

$$(MM') = (M\mu) + (\mu M'),$$

ou en divisant par Δt et passant à la limite,

$$(v) \equiv (v_e) + (v_r),$$

v, v_e et v_r désignant les vitesses absolue, d'entraînement et relative.

Analytiquement, on a

$$x = a + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,$$

d'où pour la projection de la vitesse absolue sur Ox,

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{da}{dt} + \frac{d\alpha}{dt}X + \frac{d\alpha'}{dt}Y + \frac{d\alpha''}{dt}Z\right) + \left(\alpha\frac{dX}{dt} + \alpha'\frac{dY}{dt} + \alpha''\frac{dZ}{dt}\right);$$

la première parenthèse est la dérivée de x prise en regardant X, Y, Z comme constants, c'est donc la projection

sur Ox de la vitesse du point coïncident; quant à la deuxième parenthèse, elle représente évidemment la projection sur le même axe de la vitesse relative.

Remarque. — Le théorème s'applique aux accélérations quand le mouvement d'entraînement est une translation. En effet, les directions des axes mobiles restant constantes, on peut prendre les axes fixes parallèles aux axes mobiles, et alors

$$x = a + X, \qquad y = b + Y, \qquad z = c + Z,$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2} + \frac{d^2X}{dt^2}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2} + \frac{d^2Y}{dt^2}, \qquad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2c}{dt^2} + \frac{d^2Z}{dt^2},$$

donc

$$(\gamma) \equiv (\gamma_e) + (\gamma_r),$$

puisque $\frac{d^2a}{dt^2}$, $\frac{d^2b}{dt^2}$, $\frac{d^2c}{dt^2}$ sont les composantes de l'accélération d'un point quelconque du système dans le mouvement de translation.

Hors ce cas, le théorème ne s'étend plus aux accélérations.

2. — Centre instantané de rotation.

33. — Le mouvement d'un système invariable parallèlement à un plan donné revient à celui de la projection du système sur le plan ou à l'étude du mouvement d'une figure invariable mobile dans ce même plan; il est clair, en effet, que, si le système proposé est invariable, sa projection l'est également, puisque le trapèze rectangle formé par une droite AB et sa projection ab a trois côtés AB, Aa,

Bb de grandeur constante, et qu'il en est par suite de même du quatrième côté ab.

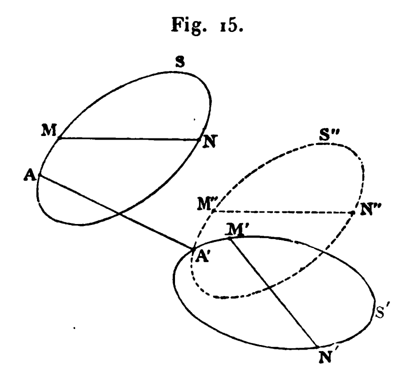
34. Théorème. — *Lorsqu'une figure plane invariable se meut dans son plan, il y a à chaque instant un point et un seul dont la vitesse est nulle à cet instant, et les vitesses des autres points sont les mêmes que si la figure tournait autour de ce point.*

Nous démontrerons d'abord les deux propriétés suivantes :

1° S *et* S′ *étant deux positions de la figure mobile, on peut toujours passer de la première à la deuxième par une translation suivie d'une rotation.*

Soient A et A′ (*fig.* 15) les deux situations succes-

Fig. 15.



sives d'un même point, dans les deux positions S et S′; imprimons d'abord à S une translation égale et parallèle à la droite AA′, alors S vient au S″. Faisant ensuite tourner S″ autour de A′, on pourra évidemment amener cette figure à coïncider avec sa position finale S′.

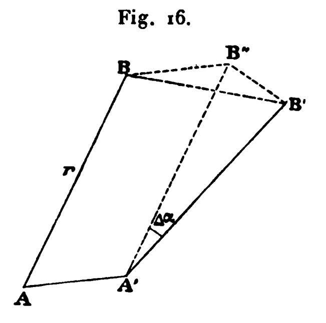
Il convient de remarquer que l'angle α de la rotation est

indépendant du point A choisi pour la translation. En effet, soit MN une droite liée à la première figure et venant en M′N′ dans la deuxième position; la translation, quel que soit le point A employé, laisse la droite MN toujours parallèle à elle-même; la rotation la fait tourner d'un angle égal à celui de la direction primitive MN avec la direction finale M′N′, comme on le voit, en menant par le point fixe A′ des parallèles aux directions initiale et finale, et cet angle α de MN avec M′N′ est absolument indépendant du point A choisi arbitrairement.

2° *La vitesse d'un point quelconque* B *est la somme géométrique de la vitesse d'un autre point* A *et de la vitesse qu'aurait le point* B *s'il tournait autour de* A *avec une certaine vitesse angulaire* ω *indépendante des points* A *et* B.

En effet, soient deux positions infiniment voisines AB,

Fig. 16.



A′B′, de la droite qui joint ces deux points aux époques t et $t + \Delta t$ (*fig.* 16), on peut passer de AB à A′B″ par une translation égale et parallèle à AA′, puis à A′B′ par une rotation dont l'angle $\Delta\alpha$ est indépendant des points A et B. Or

$$(BB') \equiv (BB'') + (B''B'),$$

divisant par Δt, passant à la limite et remarquant que

$$\lim\left(\frac{BB'}{\Delta t}\right)=v\ ,\qquad \lim\left(\frac{BB''}{\Delta t}\right)=\lim\left(\frac{AA'}{\Delta t}\right)=v_A,$$

$$\lim\left(\frac{B''B'}{\Delta t}\right)=\lim\left(\frac{2\,AB\sin\frac{\Delta\alpha}{2}}{\Delta t}\right)=r\lim\frac{\Delta\alpha}{\Delta t}=r\,\omega$$

on a donc

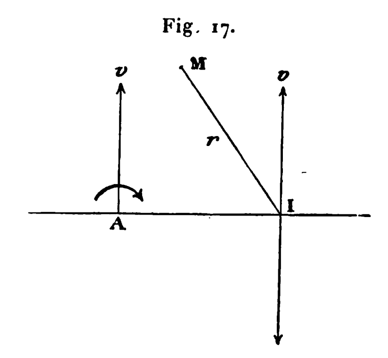
$$(v_B)\equiv(v_A)\dotplus(r\,\omega),$$

ω étant comme $\Delta\alpha$ indépendant des points A et B. En outre, la grandeur géométrique $r\omega$ est à la limite perpendiculaire à $A'B''$, ou à AB; c'est donc la vitesse qu'aurait le point B s'il tournait autour du point A avec la vitesse angulaire ω indépendante des points A et B.

Cela posé, il est facile d'établir qu'il y a, à un instant donné, un point de vitesse nulle.

Soient A un point quelconque et v sa vitesse (*fig.* 17),

Fig. 17.



menons une perpendiculaire en A à v et prenons un point quelconque I sur cette perpendiculaire; la vitesse de I est la somme géométrique de v et d'une certaine vitesse de rotation $AI\times\omega$ perpendiculaire à AI, et cette dernière

vitesse sera directement opposée à la première, si l'on a pris I d'un côté convenable de A. Prenons en outre le point I tel que $AI \times \omega = v$, alors les deux composantes de la vitesse de ce point ont une somme géométrique nulle, et I est un point de vitesse nulle.

D'ailleurs, pour un point quelconque M de la figure, on a

$$(v_M) \equiv (v_I) + (\overline{IM} \times \omega) = r\omega,$$

et par suite la vitesse de chaque point M est la même que si toute la figure tournait avec une certaine vitesse angulaire ω autour du point I, que l'on nomme *centre instantané de rotation*; il convient d'ajouter que le centre instantané I et la vitesse angulaire de rotation ω varient généralement d'un instant à l'autre, mais qu'il n'y a à un instant donné qu'un point de vitesse nulle, car s'il y en avait un second I′ la droite II′ serait fixe et il en serait de même de toute la figure.

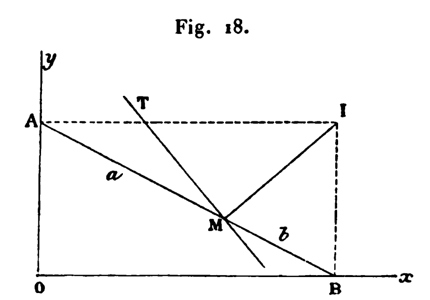
REMARQUE. — Quand le mouvement est une translation, $\omega = 0$, $AI = \frac{v}{\omega} = \infty$; on peut regarder une translation comme une rotation autour d'un point rejeté à l'infini sur une direction normale à la vitesse.

35. *Corollaires.* — I. A un instant donné, tout se passe au point de vue des vitesses seulement, comme si la figure tournait autour du centre instantané I; il en résulte que les normales aux trajectoires que décrivent les différents points de la figure vont toutes concourir au centre instantané I.

II. Si l'on a les normales aux trajectoires de deux points dans une situation donnée de la figure, on aura le centre instantané correspondant, et par suite la normale

à la trajectoire d'un point quelconque pour la même position de la figure. Considérons, par exemple, l'ellipse engendrée par un point M d'une droite de longueur constante, dont les extrémités A et B se déplacent sur deux droites rectangulaires fixes Ox et Oy (*fig.* 18); la trajectoire de A est Oy, celle de B est Ox, le centre instantané est à l'instant considéré, au point de rencontre des

Fig. 18.



normales aux trajectoires de A et B, il est donc en I quatrième sommet du rectangle construit sur OA et OB. La normale à l'ellipse décrite par le point M sera la droite MI.

36. On démontre directement ces corollaires comme suit (Chasles).

On peut amener une figure plane qui se déplace dans son plan, d'une position à une autre par une rotation.

Soit AB (*fig.* 19) une droite liée à la figure, et soit A′B′ la position occupée par AB lorsque la figure s'est déplacée; en K et K′, milieux de AA′ et BB′, élevons des perpendiculaires qui se coupent en I, les triangles AIB, A′IB′ équilatéraux entre eux sont égaux, donc il en est de même de leurs angles en I; ajoutant (ou retranchant suivant le cas)

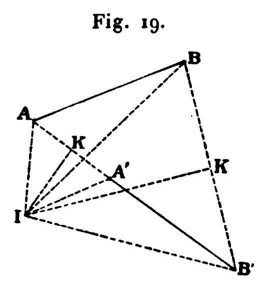
l'angle BIA', on a

$$\widehat{AIA'} = \widehat{BIB'} = \alpha.$$

Donc, en faisant tourner AB de l'angle α autour du point I, A vient en A', B en B' et cette rotation amène AB à coïncider avec A'B'.

Si le déplacement est infiniment petit, les droites telles que AA', BB', ... deviennent à la limite les tangentes aux

Fig. 19.



trajectoires de A, B, ... et KI, K'I, ... les normales; donc toute normale passe par le point I.

3. — Mouvement épicycloïdal plan.

37. *Méthode géométrique.* — Soient C une courbe fixe, A un point fixe pris sur cette courbe, C' une courbe mobile de figure invariable mais assujettie à rester constamment tangente à C, B un point fixe sur la courbe C' et enfin I le point de contact; on dit que ces courbes roulent l'une sur l'autre, quand on a constamment

$$\text{arc}\,AI - \text{arc}\,BI = \text{const.}$$

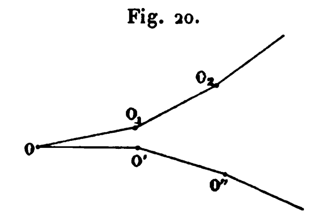
On peut toujours prendre cette constante nulle en choisissant convenablement l'un des points A ou B.

La courbe mobile est appelée *roulante,* la courbe fixe *base;* enfin on nomme *roulette* la courbe décrite par un point quelconque du plan mobile.

38. Théorème. — *Tout mouvement d'un plan mobile sur un plan fixe est épicycloïdal, c'est-à-dire peut être engendré par le roulement d'une courbe mobile sur une courbe fixe.*

Soient $O, O', O'', \ldots$ (*fig.* 20), les points du plan fixe qui sont centres instantanés de rotation aux époques $t, t+\Delta t, t+2\Delta t, \ldots$; soient au temps $t, O_1, O_2, \ldots,$

Fig. 20.



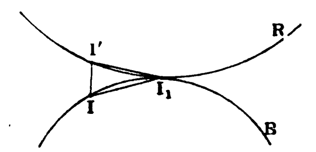
les points du plan mobile qui viendront successivement coïncider avec les centres instantanés $O', O'', \ldots,$ aux époques $t+\Delta t, t+2\Delta t, \ldots$. On peut concevoir que, pendant le premier intervalle Δt, la figure tourne autour du centre O d'un angle infiniment petit et qu'alors O_1 vient en O'; pendant le second intervalle, la figure tourne autour de O' et O_2 vient en O'', et ainsi de suite. Dans cette suite de mouvements, le polygone $OO_1O_2\ldots$ roule sur le polygone $OO'O''\ldots$; donc à la limite, quand on fait tendre chacun de ces intervalles successifs vers zéro, on a deux courbes, limites des polygones inscrits, et qui roulent l'une sur l'autre.

La courbe fixe est le lieu des centres instantanés dans le plan fixe, la courbe mobile est le lieu des points du

plan mobile qui deviennent successivement centres instantanés.

Remarque. — A chaque instant, le centre instantané I est le point de contact de la base et de la roulante. Et réciproquement : si une courbe mobile roule sur une courbe fixe, le centre instantané de la figure liée à la courbe mobile est le point de contact des deux courbes, c'est-à-dire que la vitesse du point de contact I est nulle. Car, soient au temps $t+\Delta t$, I_1 le nouveau point de

Fig. 21.



contact (*fig.* 21) et I′ la nouvelle position de I considéré comme entraîné avec le plan mobile; on a, en prenant les cordes

$$\overline{II'}^2 = \overline{II_1}^2 + \overline{I'I_1}^2 - 2\,II_1 \times I'I_1 \times \cos I'I_1I$$
$$= (II_1 - I'I_1)^2 + 4\,II_1 \times I'I_1 \times \sin^2 \frac{I'I_1I}{2};$$

or, aux infiniment petits du troisième ordre près,

$$II_1 - I'I_1 = \text{arc}\,II_1 - \text{arc}\,I'I_1 = 0,$$

$\overline{II'}^2$ est donc du quatrième ordre et II' du deuxième ordre; donc la vitesse du point I, qui est $\lim \frac{II'}{\Delta t}$, est nulle.

39. *Étude analytique du mouvement épicycloïdal.* — Soient Ox, Oy deux axes rectangulaires fixes, AX, AY deux axes rectangulaires entraînés avec le plan mobile,

a, b les coordonnées de A et α l'angle de AX avec Ox; a, b et α sont des fonctions du temps t. Considérons un point déterminé du plan mobile dont X et Y sont les coordonnées constantes par rapport aux axes mobiles, et x, y ses coordonnées relativement aux axes fixes. On a

$$(1) \qquad \begin{cases} x = a + X\cos\alpha - Y\sin\alpha, \\ y = b + X\sin\alpha + Y\cos\alpha. \end{cases}$$

Calculons la vitesse du point M entraîné avec le plan mobile; ses composantes suivant Ox et Oy sont, en remarquant que

$$\frac{da}{dt} = \frac{da}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dt},$$

et en posant

$$\frac{da}{d\alpha} = a', \qquad \frac{db}{d\alpha} = b', \qquad \frac{d\alpha}{dt} = \omega,$$

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a' - X\sin\alpha - Y\cos\alpha)\,\omega = (a' - y + b)\,\omega, \\ \dfrac{dy}{dt} = (b' + X\cos\alpha - Y\sin\alpha)\,\omega = (b' + x - a)\,\omega. \end{cases}$$

Il existe donc un point (x_1, y_1) et un seul de vitesse nulle, défini à chaque instant par les deux équations

$$(3) \qquad x_1 = a - b', \qquad y_1 = a' + b.$$

En outre, on peut écrire les composantes de la vitesse d'un point quelconque (x, y)

$$\frac{dx}{dt} = -(y - y_1)\,\omega, \qquad \frac{dy}{dt} = (x - x_1)\,\omega,$$

si donc, sans changer la direction des axes Ox et Oy, on transporte l'origine au point x_1, y_1, les composantes de la vitesse suivant les nouveaux axes ξ et η seront $-\omega\eta$ et $\omega\xi$;

donc la vitesse du point x, y est la même que s'il tournait autour du point x_1, y_1, avec la vitesse angulaire $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$.

40. Pour démontrer que le mouvement est épicycloïdal, nous rechercherons d'abord par rapport aux axes fixes Ox, Oy, l'équation de la base, c'est-à-dire le lieu des centres instantanés dans le plan fixe et celle de la roulante, ou le lieu des points du plan mobile qui doivent coïncider avec les centres instantanés successifs, dans la position qu'elle occupe à une époque déterminée t_0.

1° *Équation de la base.* — C'est le lieu des points x_1, y_1 de vitesse nulle quand t varie ; il s'obtient donc par l'élimination de α entre les équations

$$x_1 = a - b' = \varphi(\alpha), \qquad y_1 = a' + b = \psi(\alpha).$$

2° *Équation de la roulante.* — Cherchons d'abord son équation par rapport aux axes mobiles AX, AY ; les coordonnées relatives X_1, Y_1 du centre instantané sont liées à x_1, y_1 par les formules de transformation

$$x_1 = a - b' = a + X_1 \cos\alpha - Y_1 \sin\alpha,$$
$$y_1 = a' + b = b + X_1 \sin\alpha + Y_1 \cos\alpha,$$

d'où

$$(4) \qquad \begin{cases} X_1 = -b' \cos\alpha + a' \sin\alpha = \Phi(\alpha), \\ Y_1 = b' \sin\alpha + a' \cos\alpha = \Psi(\alpha); \end{cases}$$

éimlinant α, on aura le lieu des points $X_1 Y_1$ du plan mobile qui deviennent successivement centres instantanés, ou l'équation de la roulante rapportée aux axes entraînés. Etablissons maintenant l'équation de la roulante rapportée aux axes fixes, mais à une époque déterminée t_0. Soient a_0, b_0, α_0, les valeurs de a, b, α à cette époque et x_0, y_0 les coordonnées absolues d'un point quelconque de la rou-

lante à cette même époque, c'est-à-dire du point X_1, Y_1 qui deviendra centre instantané à l'époque t variable, on a alors

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= a_0 + X_1 \cos\alpha_0 - Y_1 \sin\alpha_0,\\ y_0 &= b_0 + X_1 \sin\alpha_0 + Y_1 \cos\alpha_0; \end{aligned}\right.$$

mais X_1 et Y_1 sont donnés en fonction de α par les équations (4); substituant dans (5) et éliminant α, on aura le lieu des points x_0, y_0, ou l'équation de la roulante à l'époque t_0 par rapport aux axes fixes.

41. Les équations de ces courbes étant établies, il est aisé de reconnaître qu'elles sont tangentes en leur point commun, à l'époque arbitrairement choisie $t = t_0$; en effet

$$dx_1 = (a' - b'')\,d\alpha, \qquad dy_1 = (a'' + b')\,d\alpha,$$

or

$$\begin{aligned} dx_0 &= dX_1 \cos\alpha_0 - dY_1 \sin\alpha_0,\\ dy_0 &= dX_1 \sin\alpha_0 + dY_1 \cos\alpha_0, \end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned} dX_1 &= (-b''\cos\alpha + b' \sin\alpha + a''\sin\alpha + a' \cos\alpha)\,d\alpha,\\ dY_1 &= (b' \cos\alpha + b'' \sin\alpha + a'' \cos\alpha - a' \sin\alpha)\,d\alpha, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} dX_1 &= dx_1 \cos\alpha + dy_1 \sin\alpha,\\ dY_1 &= dy_1 \cos\alpha - dx_1 \sin\alpha; \end{aligned}$$

substituant et faisant $t = t_0$, c'est-à-dire $\alpha = \alpha_0$, on a

$$dx_0 = dx_1, \qquad dy_0 = dy_1,$$

d'où

$$\frac{dy_0}{dx_0} = \frac{dy_1}{dx_1},$$

ce qui prouve qu'il y a contact, et

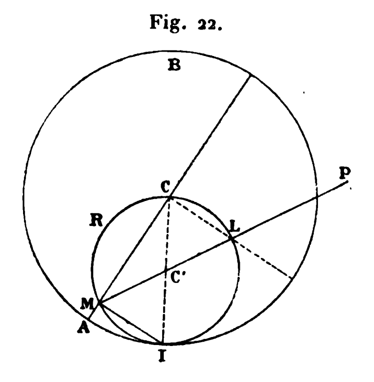
$$ds_0 = ds_1, \qquad s_1 - s_0 = \text{const.},$$

ce qui montre que les deux courbes roulent l'une sur l'autre.

42. Applications. — 1° *Normale à la cycloïde et à l'épicycloïde.* Elle joint le point décrivant au point de contact du cercle mobile avec la droite ou le cercle fixe. Quand une circonférence de rayon $\frac{r}{2}$ roule à l'intérieur d'une circonférence de rayon double r, les épicycloïdes prennent des formes simples que nous allons rechercher.

Tout point M de la roulante R (*fig.* 22) engendre une

Fig. 22.



droite, passant par le centre C de la base B; en effet MC est tangente à la trajectoire du point M, cette trajectoire a donc pour équation différentielle, en prenant le point C pour origine,

$$\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx},$$

d'où $y = cx$. On le voit encore en joignant le point C à

un point fixe A de la base, on a

$$\text{arc}\,\text{MI} = \frac{r}{2} \times \widehat{\text{MC}'\text{I}}, \qquad \text{arc}\,\text{AI} = r \times \widehat{\text{MCI}},$$

d'où

$$\text{arc}\,\text{MI} = \text{arc}\,\text{AI};$$

donc le point M de la roulante qui doit venir en A est à un instant quelconque sur la droite fixe CA, donc il la décrit.

Tout point P de la figure, lié au cercle C′, décrit une ellipse. Car si l'on joint C′P, cette droite coupe la roulante en deux points M et L qui décrivent les deux diamètres rectangulaires CM et CL de la base, donc les longueurs PM et PL étant constantes, le point P décrit une ellipse de demi-axes PM et PL placés sur CL et CM.

2° *Roulette du pôle* P *d'une spirale logarithmique qui roule sur une droite fixe* Ox.

Soit I le point de contact avec la base, la normale PI à la roulette du pôle P fait un angle constant λ avec Ox, d'où

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{cotang}\lambda = c, \qquad y = cx + c';$$

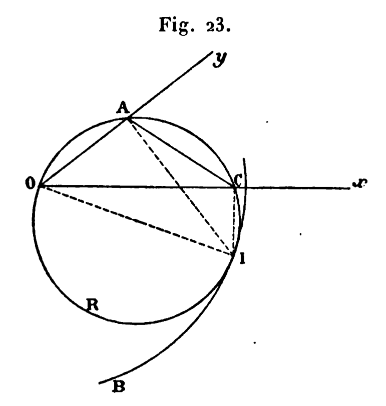
le pôle décrit une droite.

3° *Les deux extrémités* A *et* C *d'une droite de longueur fixe* AC, *glissent sur deux droites* Ox, Oy, *faisant entre elles un angle donné, cette droite entraîne un plan, trouver la base et la roulante.*

Soit AC une position de la droite (*fig.* 23), le centre instantané I est à l'intersection des perpendiculaires AI et CI à Oy et Ox; or l'angle AIC est égal à xOy ou à son supplément, donc la roulante, lieu de I dans le plan mobile, est la circonférence à laquelle appartient le segment capable de l'angle O, décrit sur AC, c'est-à-dire la circon-

férence ACIO entraînée avec AC. D'ailleurs la droite OI étant un diamètre de cette circonférence est de longueur constante et le lieu de I dans le plan fixe ou base est une circonférence de centre O et de rayon double de celui

Fig. 23.



de la roulante. Le mouvement dont il s'agit s'obtient donc en faisant rouler une circonférence à l'intérieur d'une autre de rayon double et tout point du plan mobile décrit une ellipse ou une droite.

43. Problème. — *On donne la base* B *et la roulette* D *que doit décrire un point* M *du plan mobile, trouver la roulante.*

Soit I le centre instantané à une certaine époque t_0 (*fig.* 24), le point décrivant M est alors sur la normale IM menée de I à la roulette D; considérons un axe polaire MX entraîné dans le mouvement, posons

$$MI = r, \qquad XMI = \theta$$

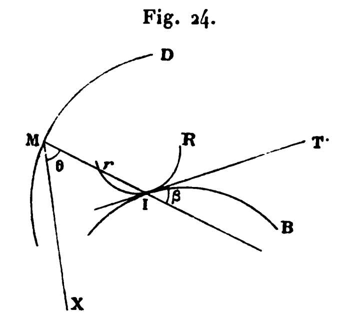
et cherchons la relation entre r et θ, ce sera l'équation de la roulante dans le plan mobile.

Les courbes B et D étant données, on connaît la relation

$$r = f(\beta)$$

qui existe entre le rayon vecteur r et l'angle β qu'il fait

Fig. 24.



avec la tangente T; on a d'ailleurs l'équation différentielle

$$r\frac{d\theta}{dr} = \operatorname{tang}\beta,$$

d'où

$$d\theta = \frac{dr}{r}\operatorname{tang}\beta = \frac{f'(\beta)}{f(\beta)}\operatorname{tang}\beta\, d\beta$$

qui, intégrée donne θ en fonction de β; éliminant β on a la relation cherchée entre r et θ.

44. Appliquons à quelques exemples :

1° *La base* B *et la roulette* D *sont deux droites.* — Si d'un point quelconque I de la base on mène une normale à la roulette D, l'angle β qu'elle fait avec B est constant,

$$\operatorname{tang}\beta = \frac{1}{a} = \frac{r\,d\theta}{dr}, \qquad r = e^{a\theta};$$

c'est une spirale logarithmique ayant le point M pour pôle; ce pôle décrit bien en effet une droite (n° 42, 2°).

2° *La base* B *est une droite* OX *et* D *la chaînette correspondante* $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$,

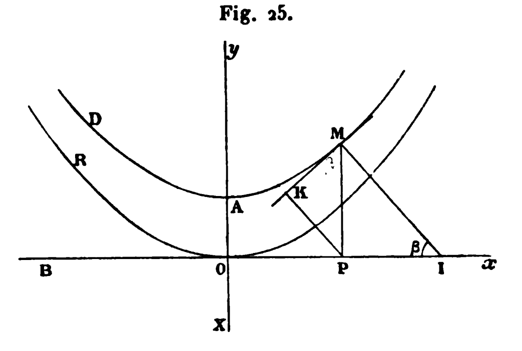
On a (*fig.* 25)

$$MI = r = \frac{PK}{\sin^2\beta} = \frac{a}{\sin^2\beta},$$

$$d\theta = \frac{dr}{r}\operatorname{tang}\beta = -2\,d\beta,$$

d'où $\theta = \pi - 2\beta$ en supposant que $\theta = 0$ pour $\beta = \frac{\pi}{2}$,

Fig. 25.



c'est-à-dire que l'on a pris AO pour axe polaire quand M est en A. Éliminant β, on a

$$r = \frac{a}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2a}{1 + \cos\theta};$$

c'est l'équation d'une parabole de foyer A; donc, quand une parabole roule sur une droite, le foyer décrit une chaînette.

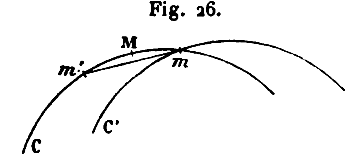
45. *Enveloppe d'une courbe mobile.* — Les diverses positions d'une courbe C invariablement liée au plan mo-

bile ont généralement une enveloppe, nous nous proposons de chercher quel est, pour une position donnée, le point de contact de la courbe et de son enveloppe.

THÉORÈME. — *Le point où la courbe mobile* C *touche son enveloppe est le pied de la normale à la courbe menée du centre instantané correspondant.*

Soient C et C′ (*fig.* 26) deux positions infiniment voisines de la courbe C aux époques t et $t+\Delta t$, m un point d'intersection de ces courbes et m' le point de C qui vient

Fig. 26.



en m au temps $t+\Delta t$. La perpendiculaire à la droite mm' en son milieu passe à la limite par le centre instantané (n° 36); or, à la limite, les deux positions m' et m d'un même point se confondent en un seul point M qui, comme situation limite de m, est le point où la courbe touche son enveloppe, et la perpendiculaire à $m'm$ devient la normale à la courbe C au point M; donc cette normale passe par le centre instantané.

Corollaire. — L'enveloppe des roulettes décrites par tous les points d'une courbe mobile C coïncide avec l'enveloppe de cette courbe.

Il résulte, en effet, de ce qui précède que la roulette du point M ayant pour tangente la position limite de $m'm$, touche l'enveloppe des courbes C et, comme le point M varie avec l'époque considérée, les trajectoires de tous les points de C touchent, à des instants différents, l'enveloppe de ces courbes.

On arrive, par l'Analyse, aux mêmes résultats. Soit une courbe C, $f(X, Y) = 0$, invariablement liée aux axes mobiles AX, AY, les formules de transformation fournissent l'équation de cette courbe rapportée aux axes fixes à l'époque t,

$$F(x, y, t) = 0;$$

cette famille de courbe aura généralement une enveloppe déterminée par les équations

$$F = 0, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = 0;$$

au point M commun à l'époque t, la tangente à l'enveloppe se confond avec celle de la courbe et son coefficient angulaire k est donné par l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x} + k\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Considérons une position C' infiniment voisine de la courbe C à l'époque $t + dt$ et soit M' $(x + dx, y + dy)$ la nouvelle position de M, on a

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial t}dt = 0;$$

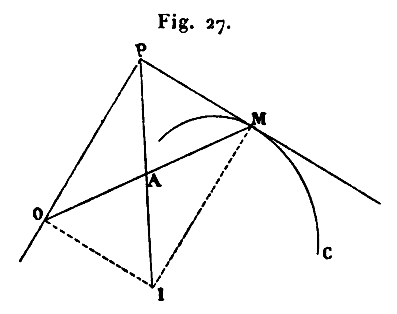
or, pour le point M, $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, donc le coefficient angulaire de la tangente MM' à la trajectoire de M est le même que celui de la tangente à l'enveloppe; donc la tangente à l'enveloppe se confond avec la tangente à la trajectoire de M et il en est de même des normales; d'ailleurs la normale à la trajectoire du point M passe par le centre instantané, celui de la normale à l'enveloppe jouit donc de la même propriété.

46. Applications. — 1° *Un angle de grandeur constante se meut dans son plan; de manière que ses côtés touchent chacun une courbe donnée; trouver le centre instantané, pour une position déterminée.*

Les deux côtés de l'angle ayant pour enveloppes les deux courbes, le centre instantané est à l'intersection des normales aux points de contact.

La construction précédente permet de déterminer la tangente à la podaire d'une courbe; cette podaire est le

Fig. 27.

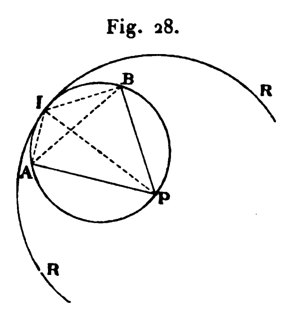


lieu des sommets P d'un angle droit dont un côté touche la courbe C (*fig.* 27) et l'autre passe par un point fixe O, c'est-à-dire est tangente à un cercle de centre O et de rayon nul; le point de rencontre I de la normale MI à la courbe C et de la droite OI perpendiculaire à OP est donc le centre instantané. On en conclut que la normale PI à la podaire passe par le milieu A du rayon vecteur OM.

Examinons encore le cas où les côtés d'un angle constant APB (*fig.* 28) sont assujettis à passer par deux points fixes A et B. Le point d'intersection I des normales aux droites PA et PB est le centre instantané. Le lieu du point P est le cercle circonscrit au triangle APB, c'est aussi le lieu du point I, c'est-à-dire la base. D'ailleurs PI est con-

stant et égal au diamètre du cercle base. Donc la roulante

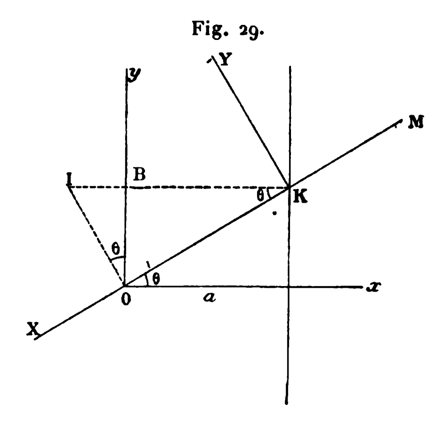
Fig. 28.



est un cercle de rayon double du premier et ayant son centre en P dans la figure mobile.

2° *Une droite se meut en restant tangente à une courbe* A, *un de ses points* K *décrivant une courbe* C,

Fig. 29.



construire la normale à la courbe décrite par un point quelconque M *de cette droite.*

Le centre instantané I est sur la normale à la courbe A qu'enveloppe la droite et sur la normale en K à la courbe C que décrit ce point.

Cette construction s'applique à la recherche de la normale à la conchoïde; cherchons, dans ce cas, la base et la roulante. Les coordonnées du centre instantané I sont, relativement aux axes fixes (*fig.* 29),

$$x = -\text{IB} = -\text{OB}\,\text{tang}\,\theta = -a\,\text{tang}^2\theta,$$
$$y = \text{OB} = a\,\text{tang}\,\theta;$$

et par rapport aux axes mobiles

$$\text{X} = \text{KO} = \frac{a}{\cos\theta},$$
$$\text{Y} = \text{X}\,\text{tang}\,\theta.$$

Éliminant θ, on a les équations

$$y^2 + ax = 0, \qquad \text{X}^4 = a^2(\text{X}^2 + \text{Y}^2);$$

la base est une parabole et la roulante une courbe du quatrième degré.

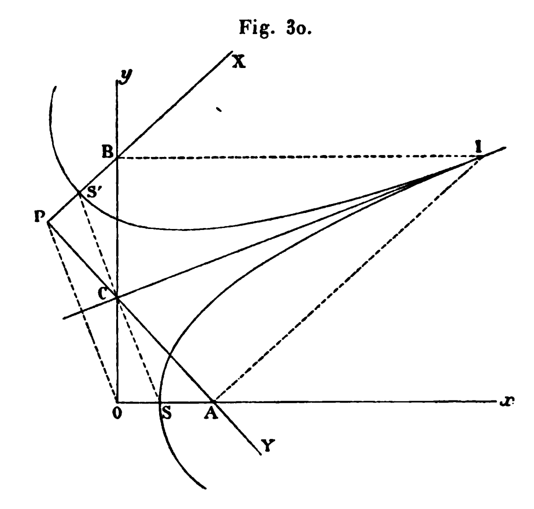
3° *Un angle droit* APB *se déplace de telle sorte que l'un des côtés passe par un point* A *fixe sur la droite* OX, *et qu'un point fixe* B *du second côté décrive la droite* Oy, *perpendiculaire sur* Ox; *on se donne la condition* PB = OA *et l'on propose de trouver la base et la roulante de ce mouvement* (*fig.* 30).

Le centre instantané I est sur la perpendiculaire AI au côté PA et sur la normale BI à Oy.

L'égalité des triangles rectangles BPC, AOC entraîne celle des triangles rectangles CBI, CAI et par suite BI = AI, ce qui prouve que le lieu du point I, par rapport aux axes fixes, est une parabole ayant A pour foyer et Oy pour directrice. Si nous prenons pour axes mobiles PB et PA, la même égalité BI = AI nous montre que, rapporté à ces axes, le lieu du point I est encore une parabole ayant B pour foyer et PA pour directrice.

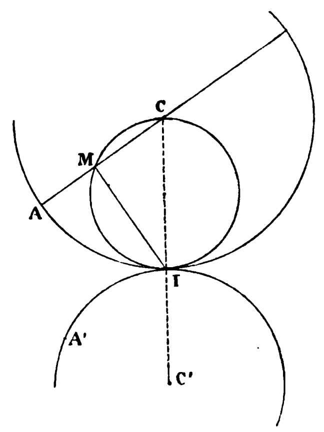
Ces deux paraboles sont égales comme ayant même

Fig. 30.



paramètre OA = PB et elles sont symétriques par rapport

Fig. 31.



à leur tangente commune CI.

4° *Un cercle* C *roule sur un cercle* C′, *trouver*

l'enveloppe d'un diamètre AB *du cercle* C (*fig.* 31).

La droite IM perpendiculaire à AB est la normale à l'enveloppe cherchée et cette courbe est le lieu du point M. Or soit A′ le point de la base qui a coïncidé avec A, on a IA′ = IA; mais si l'on décrit la circonférence de diamètre IC, on a aussi arc IM = arc IA, donc le lieu du point M est l'épicycloïde que l'on obtient en faisant rouler sur le cercle de base C′ le cercle de diamètre IC, le point décrivant étant d'abord en A′.

47. *Mouvement relatif du plan fixe par rapport au plan mobile.* — On réalise ce mouvement en donnant à chaque point du plan fixe une vitesse égale et contraire à celle de ce point considéré comme entraîné avec le plan mobile.

Car, entre la vitesse absolue v, la vitesse relative v_r et la vitesse d'entraînement v_e, on a la relation

$$(v) = (v_r) + (v_e);$$

or ici $v = 0$, puisque le point est fixe dans le plan fixe, donc

$$v_r = -v_e.$$

Cela posé, le centre instantané a une vitesse d'entraînement nulle, il en est donc de même de sa vitesse relative et par suite il est centre instantané dans le mouvement relatif; la base devient la roulante et inversement.

Si, dans le mouvement primitif, un point M lié au plan mobile décrit une courbe C du plan fixe, la courbe C dans le mouvement relatif paraît mobile, en passant toujours par le point M.

4. — Centre des accélérations.

48. Lemme. — *Lorsqu'une figure plane se déplace dans son plan, l'accélération* γ_B *d'un point quelconque* B *est la somme géométrique de l'accélération d'un autre point* A, *arbitrairement choisi, et de celle qu'aurait* B *s'il tournait autour de* A *avec la vitesse angulaire variable de la rotation instantanée.*

Car soient a, b les coordonnées du point A et x, y celles du point B; menons par A des axes rectangulaires AX, AY liés au plan ; on a

$$x = a + X\cos\alpha - Y\sin\alpha,$$
$$y = b + X\sin\alpha + Y\cos\alpha ;$$

d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2a}{dt^2} + \frac{d^2}{dt^2}(X\cos\alpha - Y\sin\alpha),$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2b}{dt^2} + \frac{d^2}{dt^2}(X\sin\alpha + Y\cos\alpha) ;$$

γ_B est donc la somme géométrique 1° d'une accélération ayant pour composantes $\frac{d^2a}{dt^2}$ et $\frac{d^2b}{dt^2}$, c'est-à-dire γ_A, 2° de ce que serait γ_B si l'on avait $\frac{d^2a}{dt^2} = 0$, $\frac{d^2b}{dt^2} = 0$; or cette double condition serait remplie si le point A était fixe, mais alors α varierait seul, le système ne ferait que tourner autour de A, et la vitesse augulaire serait précisément $\frac{d\alpha}{dt} = \omega$, vitesse de la rotation instantanée.

C. Q. F. D.

Corollaire. — On a

$$(\gamma_B) \equiv (\gamma_A) + \left(AB \times \frac{d\omega}{dt}\right) + (AB \times \omega^2),$$

la grandeur $AB \times \frac{d\omega}{dt}$ étant portée sur la perpendiculaire à AB dont le sens où α croît et $AB \times \omega^2$ sur la direction BA, car ces deux dernières grandeurs ont pour somme géométrique l'accélération de B tournant autour de A avec la vitesse angulaire ω.

49. Théorème. — *Dans tout mouvement plan il y a, à chaque instant, un point d'accélération nulle, et l'accélération des autres points est la même que s'ils tournaient autour de lui avec la vitesse angulaire variable ω de la rotation instantanée.*

Soient x_1, y_1 les coordonnées du centre instantané à l'époque t, les composantes de la vitesse d'un point x, y du plan mobile sont alors

$$\frac{dx}{dt} = -\omega(y - y_1), \qquad \frac{dy}{dt} = \omega(x - x_1);$$

celles de l'accélération sont par suite

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d\omega}{dt}(y - y_1) - \omega\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dy_1}{dt}\right),$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}(x - x_1) + \omega\left(\frac{dx}{dt} - \frac{dx_1}{dt}\right)$$

ou, en éliminant les composantes de la vitesse du point,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{d\omega}{dt}(y - y_1) - \omega^2(x - x_1) + \omega\frac{dy_1}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}(x - x_1) - \omega^2(y - y_1) - \omega\frac{dx_1}{dt};$$

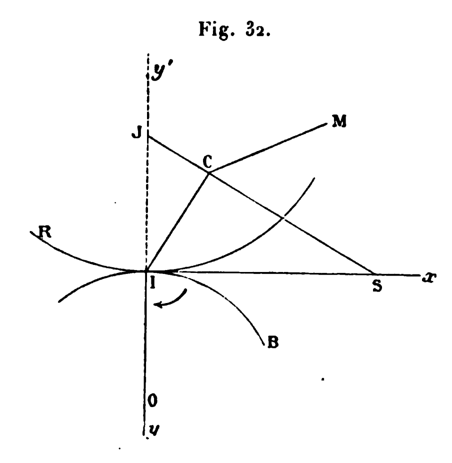
égalant chacune de ces composantes à zéro, on obtient les équations de deux droites rectangulaires, qui se coupent au point d'accélération nulle.

La seconde partie du théorème résulte du lemme précédent. A cause de cette dernière propriété, le point d'accélération nulle a reçu le nom de *centre des accélérations*.

Il convient de remarquer qu'en général, les composantes $\frac{dx_1}{dt}$ et $\frac{dy_1}{dt}$ ne sont pas nulles, car quoique le point x_1, y_1 considéré comme entraîné avec le plan mobile ait une vitesse nulle, il est remplacé à chaque instant par un autre point. Ces quantités sont donc les composantes de la vitesse v, avec laquelle un point variable du plan fixe prend successivement les positions du centre instantané, c'est-à-dire de la vitesse avec laquelle se déplace sur la base, ou sur la roulante, le point de contact de ces deux courbes.

50. *Détermination du centre des accélérations, à un instant donné.* — Portons l'origine des axes coordonnés

Fig. 32.



au centre instantané I à l'instant considéré et prenons pour axe des x la tangente à la base, dans le sens où le

point de contact se déplace; on a alors, V étant la valeur absolue de la vitesse v de déplacement du centre instantané,

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = 0,$$
$$\frac{dx_1}{dt} = V, \qquad \frac{dy_1}{dt} = 0.$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -y\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 x, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = x\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y - \omega V.$$

Les coordonnées du point C d'accélération nulle (*fig.* 32) satisfont donc aux deux équations linéaires

$$\omega^2 x + \frac{d\omega}{dt}y = 0, \qquad \frac{d\omega}{dt}x - \omega^2 y = \omega V;$$

la première représente une droite passant par le centre instantané, la deuxième est l'équation d'une droite coupant les axes en des points S et J tels

$$IS = \frac{\omega V}{\frac{d\omega}{dt}}, \qquad IJ = -\frac{V}{\omega}.$$

Remarques. — I. Si ω est constant, $\frac{d\omega}{dt} = 0$, les équations du centre des accélérations deviennent

$$x = 0, \qquad y = -\frac{V}{\omega} = IJ.$$

Le centre des accélérations est alors en J et toutes les accélérations passent par ce point, car $\frac{d\omega}{dt}$ étant nul, la composante de l'accélération perpendiculaire à MJ est également nulle, puisqu'elle est $MJ \times \frac{d\omega}{dt}$.

Le point J s'appelle *centre géométrique des accélérations,* parce que quand il s'agit de déplacements pure-

ment géométriques, c'est-à-dire où n'entre pas le temps, on peut supposer ω constant.

II. Le point I du plan mobile qui coïncide avec le centre instantané a une vitesse nulle, mais son accélération ne l'est pas; on la déduit en effet des formules qui donnent l'accélération d'un point quelconque, en faisant $x = 0, y = 0$, il vient alors

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = -\omega V;$$

l'accélération du centre instantané de rotation est dirigée suivant la normale commune à la base et la roulante, et égale à $-\omega V$. Or, si l'on prend l'axe des y dirigé vers le centre de courbure O de la base, on aura, si la roulante est extérieure à la base, $\omega > 0$ et par suite $-\omega V < 0$; cette longueur devra être portée sur le prolongement de l'axe des y, pour avoir l'accélération du point I. Si au contraire la roulante est intérieure à la base, $\omega < 0$ et l'accélération du point I devra être portée dans le sens du rayon de courbure de la base. Du reste, on voit immédiatement quel est, dans chacun de ces cas, le sens de la déviation du point I.

51. *Méthode géométrique.* — Recherchons d'abord l'accélération du centre instantané, en employant les axes simples définis au n° précédent; cette accélération est la limite du quotient par Δt de la différence géométrique des vitesses aux époques t et $t + \Delta t$. Or, soient I et I_1 les centres instantanés aux époques t et $t + \Delta t$, (*fig.* 33) la vitesse du point I à ce second instant, est si le point I est venu en I',

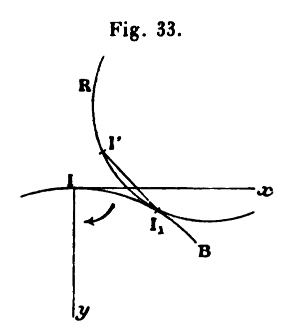
$$v_1 = (\omega + \Delta\omega) \times I_1 I',$$

et cette vitesse est perpendiculaire à $I_1 I'$; d'ailleurs, à l'époque t, $v_I = 0$, donc

$$\gamma_I = \lim \frac{(\omega + \Delta\omega) \times I_1 I'}{\Delta t} = \lim \frac{\omega \Delta s}{\Delta t} = \omega V,$$

et cette quantité est portée à la limite sur la perpendiculaire à la tangente en I, soit dans le cas de la figure

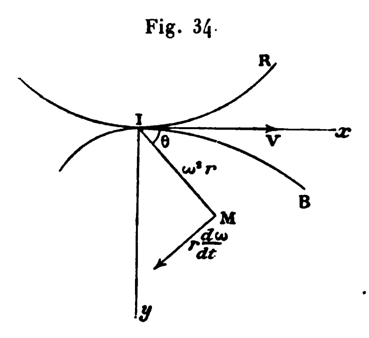
Fig. 33.



sur Iy prolongé, ce qui revient à porter $-\omega V$ sur Iy, puisque $\omega > 0$.

Cela posé, en nous appuyant sur le lemme primitif,

Fig. 34.



l'accélération γ_M d'un point quelconque $M(r, \theta)$ du plan

mobile est (*fig.* 34)

$$(\gamma_M) \equiv (-\omega V) + (\omega^2 r) + \left(r \frac{d\omega}{dt}\right);$$

projetant sur Ox et Oy, on a

$$\gamma_x = -\omega^2 r \cos\theta + r \frac{d\omega}{dt} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\gamma_y = -\omega V - \omega^2 r \sin\theta + r \frac{d\omega}{dt} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

ou

$$\gamma_x = -\omega^2 x - y \frac{d\omega}{dt},$$

$$\gamma_y = -\omega V - \omega^2 y + x \frac{d\omega}{dt};$$

égalant ces quantités à zéro, on aurait le centre des accélérations.

52. *Cercle des inflexions.* — Proposons-nous de trouver, à l'époque t, le lieu des points pour lesquels l'accélération est tangentielle. La composante normale de l'accélération de M, évaluée suivant MI, est $\omega V \sin\theta + \omega^2 r$; en l'égalant à zéro, on a l'équation

$$\omega r + V \sin\theta = 0,$$

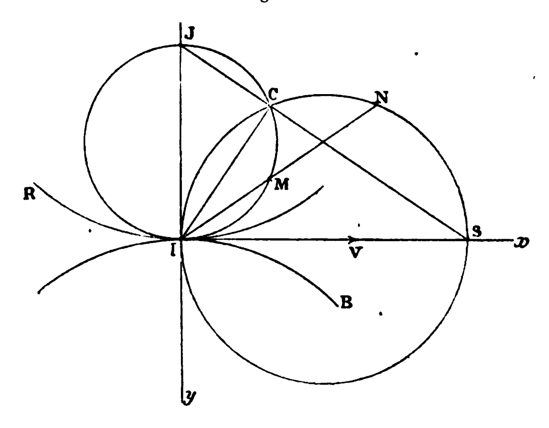
ou, en multipliant par r supposé différent de zéro,

$$\omega(x^2 + y^2) + Vy = 0;$$

c'est l'équation d'un cercle tangent en I à l'axe des x, et passant par le point J, car pour $x = 0$, on a $y = -\frac{V}{\omega}$, c'est donc le cercle décrit sur IJ comme diamètre (*fig.* 35). On l'appelle *cercle des inflexions,* parce que tous ses points ayant leur accélération normale nulle, on

a $\frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 r^2}{R} = 0$, ou puisque $r \gtrless 0$, $R = \infty$; donc la trajectoire de chacun des points de ce cercle présente une inflexion en ce point, à l'intant considéré t, sauf au centre

Fig. 35.



instantané, dont la trajectoire présente un rebroussement normal à la vitesse V.

53. *Lieu des points dont l'accélération est normale.* — Le lieu cherché s'obtient en égalant à zéro la composante tangentielle de l'accélération du point M,

$$r \frac{d\omega}{dt} - \omega V \cos\theta = 0,$$

ou, en éliminant toujours le cas de $r = 0$,

$$(x^2 + y^2) \frac{d\omega}{dt} - \omega V x = 0;$$

c'est l'équation d'un cercle tangent à Iy au point I et

passant par le point S qui a pour coordonnées

$$y = 0, \qquad x = \frac{\omega V}{\frac{d\omega}{dt}}.$$

Remarque. — Le point C situé à l'intersection de ces deux circonférences est le centre des accélérations. Mais le point I quoique sur les deux circonférences n'est pas un point d'accélération nulle ; nous avons trouvé, en effet, que son accélération, dirigée suivant Oy, est égale à $-\omega V$. D'ailleurs, dans les calculs précédents, nous avons supposé $r \gtrless 0$, donc il n'est pas étonnant que les formules ne s'appliquent pas au point I, pour lequel r est nul et θ indéterminé.

On se rend plus complètement compte de la singularité que présente le point I, à l'aide des considérations suivantes. Pour un point tel que M situé sur le cercle des inflexions, l'accélération est dirigée suivant la normale à IM ; or si M se rapproche indéfiniment de I, la position limite de IM sera Ix, donc l'accélération de I considéré comme appartenant à cette circonférence sera normale à Ix. De même, pour un point N de la seconde circonférence, l'accélération est dirigée suivant IN, qui, à la limite, devient la droite Iy ; donc de ce que le point I est à la fois sur les deux circonférences, on ne peut tirer qu'une seule conclusion, savoir que la composante de son accélération suivant Ox est nulle.

5. — Rayons de courbure.

54. *Relation entre la vitesse angulaire et la vitesse de déplacement du centre instantané.* — Soient ω la vitesse angulaire, V la vitesse de déplacement du point de

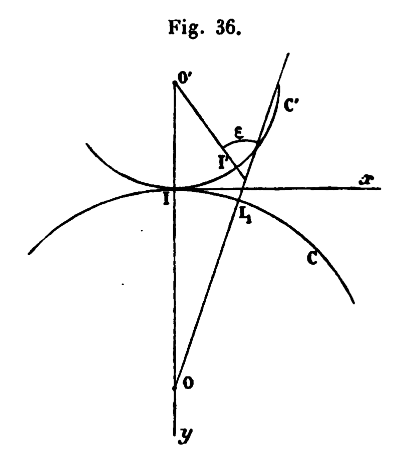
contact, R et R′ les rayons de courbure de la base et de la roulante, on a la relation importante

$$(1)\qquad \frac{\omega}{V} = \frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'},$$

le signe supérieur répondant au cas où ces courbes ont des concavités opposées et le signe inférieur à celui où elles sont de même sens. On peut d'ailleurs ne conserver que le signe inférieur pour les deux cas à la condition de donner un signe à R′.

1er CAS. — *Concavités opposées*. Soient C la base, C′ la roulante (*fig.* 36), I le centre instantané à l'époque t,

Fig. 36.



I_1 le centre instantané à l'instant $t + \Delta t$, I′ le point de C′ qui vient alors en I_1, I_1O, $I'O'$ les normales aux courbes C et C′; on a

$$\text{arc}\, II' = \text{arc}\, II_1 = \Delta s.$$

Au bout du temps Δt, $I'O'$ se place sur la direction OI_1 prolongée, par suite l'angle ε de ces deux droites est celui

de la rotation infiniment petite du plan, puisque c'est l'angle des positions initiale et finale d'une même droite du plan aux époques t et $t+\Delta t$; donc, en valeur absolue

$$\omega = \lim \frac{\varepsilon}{\Delta t}.$$

Mais

$$\varepsilon = O + O'$$

d'où

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\left(\frac{O}{\Delta s} + \frac{O'}{\Delta s}\right);$$

or

$$\lim \frac{O}{\Delta s} = \frac{1}{R}, \qquad \lim \frac{O'}{\Delta s} = \frac{1}{R'}, \qquad \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = V,$$

donc

$$\omega = V\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

D'ailleurs V est une valeur absolue et $\omega > 0$, puisque la rotation se fait de I'O' vers OI, ou de Ox vers Oy, donc la formule est exacte eu égard aux signes.

2ᵉ Cas. — *Concavités de même sens.* Soit d'abord $R > R'$ (*fig.* 37), alors la roulante est à l'intérieur et $\omega < 0$. L'angle ε des deux positions de O'I' aux époques t et $t+\Delta t$, c'est-à-dire des deux droites O'I' et OI_1 est

$$\varepsilon = O' - O$$

d'où

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\left(\frac{O'}{\Delta s} - \frac{O}{\Delta s}\right),$$

mais

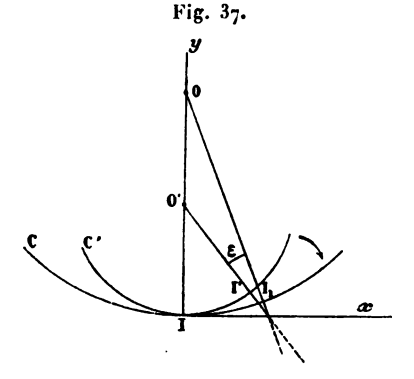
$$\lim \frac{\varepsilon}{\Delta t} = -\omega,$$

donc

$$\omega = V\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right).$$

Si $R < R'$, la roulante est extérieure à la base, $\omega > 0$, il

Fig. 37.



en est de même de $\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$, donc la même formule subsiste.

Corollaire. — Lorsque $\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$ est constant, ainsi que l'une des quantités V ou ω, il en est de même de l'autre. On peut toujours supposer V constant quand il s'agit d'une construction ou d'une propriété géométrique indépendante des vitesses du système.

55. *Autre formule.* — Le centre géométrique J des accélérations s'obtient en portant sur Iy la quantité $-\frac{V}{\omega}$, soit donc J cette quantité susceptible de signe, on aura, suivant que les concavités seront opposées ou de même sens,

$$\frac{1}{J} = -\frac{\omega}{V} = -\left(\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'}\right);$$

ces deux formules sont comprises dans la formule unique

qui donne le point J,

$$\frac{1}{J} + \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = 0, \tag{2}$$

dans laquelle R est positif, d'après le choix de l'axe des y, mais R' et J sont susceptibles de signes.

Si, par exemple, un cercle O' roule à l'intérieur d'un cercle O de rayon double, la formule donne $J = R$, donc le point J se confond avec le centre O de la base ; effectivement, le cercle de diamètre IO est celui des inflexions, car tous ses points décrivant des droites, le rayon de courbure de leur trajectoire est infini.

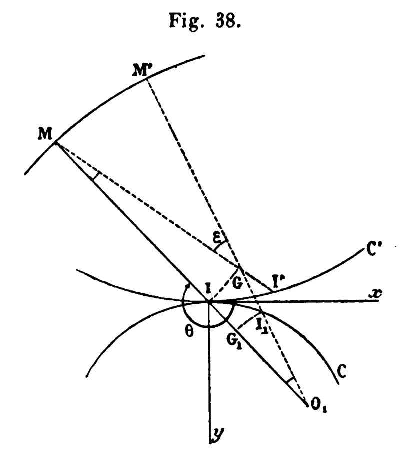
56. Cas particuliers. — 1° *La base est une droite.* Alors $R = \infty$, $J = R'$, le point J coïncide avec le centre de courbure de la roulante. Si la roulante est un cercle, on a le mouvement cycloïdal ; le point J est au centre O du cercle. On pouvait le prévoir, car le point O décrit une ligne droite parallèle à la base, d'où il résulte qu'il est constamment sur le cercle des inflexions ; il doit donc coïncider avec le point J, car le cercle des inflexions doit être tangent en I à la base.

2° *La roulante est une droite.* Tout point M de cette droite décrit une courbe dite *développante* de la base ; la base se nomme alors la *développée* de ces courbes. La droite MI, en se déplaçant, reste à la fois normale à la trajectoire du point M et tangente à la base, donc les normales à la développante sont tangentes à la développée ; il en résulte aussi que le centre de courbure d'une développante est au centre instantané, car c'est l'intersection de deux normales infiniment voisines de la développante, c'est-à-dire de deux tangentes de la développée.

Enfin on a $J = -R$; le point J est symétrique, par rapport au centre instantané, du centre de courbure de la développée.

57. *Centre de courbure d'une roulette.* — Soient $M(r, \theta)$ un point mobile (*fig.* 38), M' sa position infiniment voisine, I et I_1 les situations correspondantes du

Fig. 38.



centre instantané, et I' le point de la roulante qui viendra en I_1; IM et I_1M' sont les normales à la roulette de M, aux époques t et $t + \Delta t$ et l'intersection O_1 de ces droites tend vers le centre de courbure de la roulette en M. Soient encore r_1, θ les coordonnées du point O_1; dans le cas de la figure $r_1 = -IO_1$, il serait $+IO_1$ si O_1 était sur OM, au lieu d'être sur son prolongement; on a la relation

$$(3) \qquad \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \sin\theta\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$

En effet ε, angle de MI′ avec sa position $M'I_1$ à l'époque $t+\Delta t$, est l'angle de la rotation pendant le temps Δt, d'ailleurs $\omega > 0$, donc

$$\omega = \lim \frac{\varepsilon}{\Delta t},$$

en grandeur et en signe ; mais

$$\varepsilon = O_1 + M, \qquad \text{arc}\, II' = \text{arc}\, II_1 = \Delta s,$$

d'où

$$\frac{\varepsilon}{\Delta t} = \frac{\Delta t}{\Delta s}\left(\frac{O_1}{\Delta s} + \frac{M}{\Delta s}\right).$$

Pour trouver la limite du second membre, décrivons de M comme centre, avec MI pour rayon, un arc de cercle IG, le triangle GII′ donne

$$\lim \frac{IG}{II'} = \lim \frac{\sin I'}{\sin G} = \frac{\sin MIx}{\sin \frac{\pi}{2}} = \sin(2\pi - \theta) = -\sin\theta,$$

d'où

$$\lim \frac{M}{\Delta s} = -\frac{\sin\theta}{IM} = -\frac{\sin\theta}{r};$$

de même le triangle II_1G_1 donne

$$\lim \frac{O_1}{\Delta s} = -\frac{\sin\theta}{O_1 I} = \frac{\sin\theta}{r_1},$$

d'où

$$\omega = V\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\sin\theta,$$

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

C.Q.F.D.

Avec un autre cas de figure, on aurait par exemple (*fig.* 39)

$$\varepsilon = M - O_1,$$

$$\lim \frac{\varepsilon}{\Delta t} = -\omega = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}\left(\frac{M}{\Delta s} - \frac{O_1}{\Delta s}\right)$$

$$= V\left(\frac{\sin\theta}{r} - \frac{\sin\theta}{r_1}\right),$$

Fig. 39.

ce qui conduit à la même formule.

Corollaires. — I. En vertu de la relation

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = -\frac{1}{J},$$

on a encore la formule

$$(4) \qquad \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{1}{J\sin\theta}.$$

II. On peut retrouver le cercle des inflexions en cherchant le lieu des points M pour lesquels le rayon de courbure de la roulette est infini; faisant $r_1 = \infty$ dans la formule qui précède, on a

$$r = J\sin\theta,$$

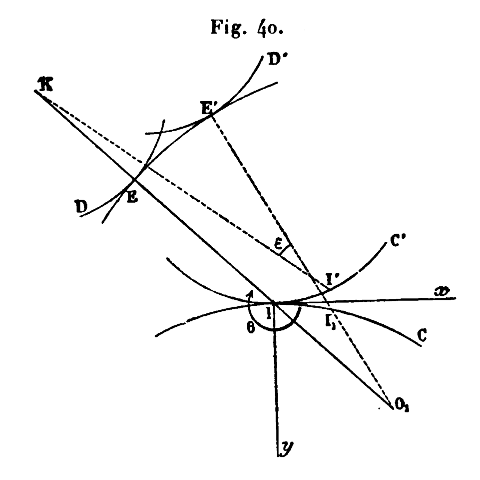
c'est le cercle décrit sur IJ comme diamètre.

58. *Centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe.* — La recherche de ce centre de courbure se ramène à celle du centre de courbure d'une roulette à l'aide du théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe, en un point donné de cette enveloppe, est le même que celui de la roulette décrite par le centre de courbure correspondant de la courbe mobile.*

Soient, en effet D et D′ les positions de la courbe aux époques t et $t+\Delta t$ (*fig.* 40), I et I_1 les centres instan-

Fig. 40.



tanés correspondants, I′ le point de la roulante qui vient en I_1, E et E′ les points de contact de D et D′ avec l'enveloppe; IE, I_1E' sont des normales à l'enveloppe, donc leur point de rencontre O_1 a pour limite le centre de courbure de cette enveloppe. Menons encore I′K normale à D; à la limite, le point K de rencontre de cette normale avec IE est le centre de courbure de la courbe D.

Soient r et θ les coordonnées polaires du point K,

r_1 et θ celles de O_1; on a, ε étant l'angle de KI' avec sa nouvelle position I_1E' et remarquant que $\omega > 0$,

$$\omega = \lim \frac{\varepsilon}{\Delta t}, \qquad \varepsilon = O_1 + K,$$

$$\lim \frac{\varepsilon}{\Delta t} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t}\left(\frac{O_1}{\Delta s} + \frac{K}{\Delta s}\right),$$

$$\lim \frac{K}{\Delta s} = -\frac{\sin\theta}{IK} = -\frac{\sin\theta}{r},$$

$$\lim \frac{O_1}{\Delta s} = -\frac{\sin\theta}{IO_1} = \frac{\sin\theta}{r_1},$$

d'où

$$\omega = V\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\sin\theta.$$

Or c'est la formule qui donne le rayon de courbure de la roulette décrite par le point K centre de courbure de la courbe mobile; donc le centre de courbure de l'enveloppe est celui de la roulette décrite par le point K.

59. *Corollaires.* — I. Les enveloppes de deux courbes parallèles D et D_1 sont des courbes parallèles, car le point K est le même pour les courbes D et D_1, donc aussi le point O_1 et par suite les deux enveloppes ayant mêmes centres de courbure sont parallèles.

II. Le centre de courbure de l'enveloppe d'une droite du plan mobile s'obtient en faisant $r = \infty$, d'où

$$\frac{1}{r_1}\sin\theta = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = -\frac{1}{J}, \qquad r_1 + J\sin\theta = 0.$$

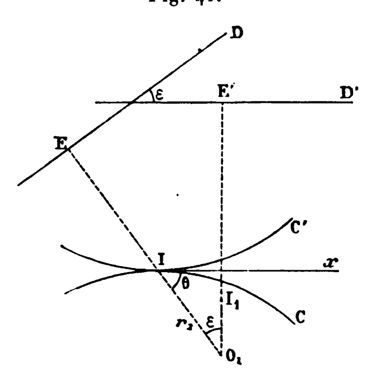
Le lieu des centres de courbure des enveloppes des droites du plan mobile est, à un instant donné, le cercle symétrique de celui des inflexions par rapport au centre instantané.

L'équation de ce lieu s'obtient d'ailleurs très simple-

ment comme suit; on a dans le triangle $O_1 I I_1$ (*fig.* 41),

$$\frac{I_1 O_1}{\sin\theta} = \frac{I I_1}{\sin\varepsilon},$$

Fig. 41.



d'où

$$\lim I_1 O_1 = r_1 = \lim \frac{\Delta s}{\varepsilon}\sin\theta = \frac{V}{\omega}\sin\theta = -J\sin\theta;$$

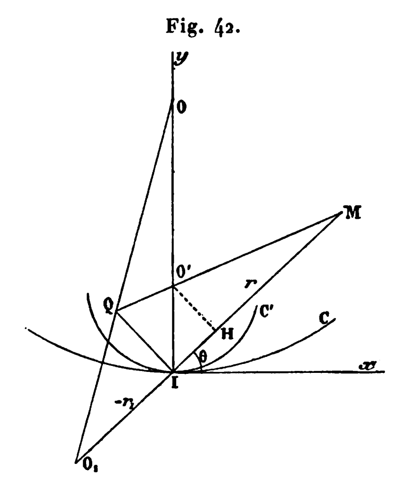
$$r_1 + J\sin\theta = 0.$$

Si l'enveloppe d'une droite mobile présente un point de rebroussement de première espèce, le rayon de courbure étant nul pour ce point, le centre de courbure correspondant se confondra avec le point de rebroussement lui-même; donc ce point de rebroussement se trouvera sur le cercle lieu des centres de courbure des enveloppes qui répond au point considéré. Pour cette raison, ce lieu a reçu le nom *cercle des rebroussements*.

Si une droite mobile passe par un point fixe, ce point étant centre de courbure de l'enveloppe de la droite dans toutes ses positions, tous les cercles des rebroussements passent par ce point.

60. *Construction de Savary.* — Cette construction, due de fait à Euler ([1]), donne le centre de courbure d'une roulette et par suite d'une enveloppe. Voici en quoi elle consiste. On joint le point décrivant M au centre de courbure correspondant O′ de la roulante (*fig.* 42), on prolonge MO′ jusqu'en Q situé sur la perpendiculaire IQ

Fig. 42.



à IM, on joint ce point Q au centre de courbure O de la base et l'on prolonge cette droite jusqu'à sa rencontre en O_1 avec la normale MI à la roulette, O_1 est le centre de courbure de la roulette du point M.

Abaissons, en effet, O′H perpendiculaire sur IM, on a

$$\frac{\mathrm{IQ}}{\mathrm{IM}} = \frac{\mathrm{O'H}}{\mathrm{MH}},$$

or

$$\mathrm{IM} = r, \qquad \mathrm{O'H} = \mathrm{R'}\cos\theta, \qquad \mathrm{MH} = r - \mathrm{R'}\sin\theta,$$

([1]) *Nouveaux Commentaires de Saint-Pétersbourg, pour* 1766, t. XI, p. 209.

d'où

$$IQ = \frac{rR'\cos\theta}{r - R'\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{\frac{1}{R'} - \frac{1}{r}\sin\theta};$$

on aurait de même, en appelant Q_1 le point de rencontre de O_1O avec IQ,

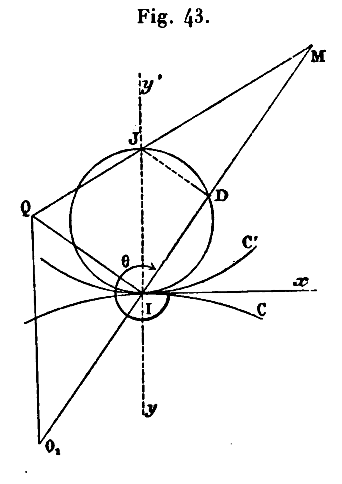
$$IQ_1 = \frac{\cos\theta}{\frac{1}{R} - \frac{1}{r_1}\sin\theta}$$

d'où $IQ_1 = IQ$, en vertu de la relation précédemment démontrée

$$\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} = \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right)\sin\theta, \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

61. *Construction de Savary modifiée.* — Soit O_1 le

Fig. 43.



centre de courbure de la roulette du point M (*fig.* 43), le rayon de courbure $MO_1 = \rho$ rencontre le cercle des

inflexions en un point D, tel que

$$r^2 = \rho \times \text{MD};$$

on a en effet, en égalant deux expressions de l'accélération normale précédemment indiquées (nos 18 et 52),

$$\frac{v^2}{\rho} = \frac{\omega^2 r^2}{\rho} = r\omega^2 + \omega \text{V} \sin\theta,$$

d'où

$$r^2 = \rho\left(r + \frac{\text{V}}{\omega}\sin\theta\right) = \rho(r - \text{J}\sin\theta) = \rho \times \text{MD}.$$

Cette propriété conduit à la construction suivante du centre de courbure O_1 : on joint le point M au point J et l'on prolonge cette droite jusqu'à sa rencontre en Q avec la perpendiculaire IQ au rayon IM, puis par le point Q on mène une parallèle à IJ jusqu'à sa rencontre en O_1 avec MI, O_1 est le centre de courbure cherché; car

$$\frac{\text{MO}_1}{r} = \frac{\text{MQ}}{\text{MJ}} = \frac{r}{\text{MD}},$$

d'où

$$\text{MO}_1 = \rho.$$

La connaissance des seuls points I et J fournit donc le centre de courbure de toutes les roulettes.

Remarque. — Cette règle peut encore se déduire de la construction de Savary, si l'on observe que la base et la roulante n'entrent dans l'équation qui définit le centre de courbure que par la différence $\frac{1}{\text{R}} - \frac{1}{\text{R}'}$; or

$$\frac{1}{\text{R}} - \frac{1}{\text{R}'} = -\frac{1}{\text{J}} = \frac{1}{\infty} - \frac{1}{\text{J}},$$

donc on peut faire la construction de Savary avec une

base de rayon infini, c'est-à-dire une droite et le cercle de rayon J, soit un cercle ayant J pour centre et de rayon double de celui des inflexions. Cela revient à opérer comme si le mouvement résultait du roulement sur une droite, de ce cercle, qu'on appelle *cercle de roulement,* et la construction de Savary appliquée au roulement de ce cercle sur Ox, conduit à la règle précédente.

6. — Applications géométriques.

62. PROBLÈME. — *Connaissant les centres de courbure des roulettes décrites par deux points* M *et* N *d'un plan mobile, trouver le centre instantané de rotation* I *et le centre géométrique* J *des accélérations.*

La recherche de ces points repose sur la propriété suivante :

LEMME. — *L'axe radical du cercle de centre* M *et de rayon* MI *et du cercle décrit sur le rayon de courbure* MO_1 *de la roulette comme diamètre, passe par le point* J.

Soit, en effet, j le point où cet axe radical coupe la droite IM (*fig.* 44), on a

$$Mj \times MO_1 = \overline{MF}^2 = \overline{MI}^2,$$

ou, en posant $Ij = j$,

$$(r - j)(r - r_1) = r^2 \qquad \text{ou} \qquad -rr_1 - jr + jr_1 = 0$$

d'où

$$-\frac{1}{j} = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r};$$

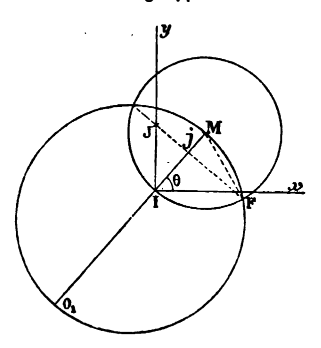
mais on a aussi

$$-\frac{1}{J\sin\theta}=\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r},$$

il en résulte

$$j=J\sin\theta,$$

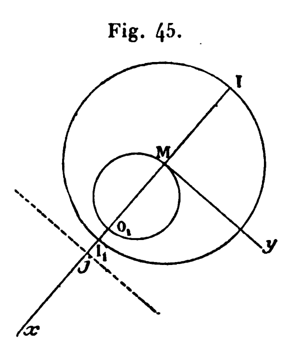
Fig. 44.



c'est-à-dire que j est la projection de J sur MI, donc l'axe radical passe par J.

Cette démonstration suppose que les deux cercles se

Fig. 45.



coupent, il est aisé de reconnaître qu'elle subsiste encore dans le cas contraire; prenons M pour origine et MO_1

pour axe des x, les cercles ont pour équations (*fig.* 45)

$$x^2 + y^2 - \overline{\mathrm{MI}}^2 = 0, \qquad x^2 + y^2 - x \times \mathrm{MO}_1 = 0,$$

d'où l'axe radical

$$\overline{\mathrm{MI}}^2 = x \times \mathrm{MO}_1 = \mathrm{M}j \times \mathrm{MO}_1 = (j - r)(r_1 - r);$$

ou, si c'est I_1 qui est centre instantané,

$$\overline{\mathrm{MI}}_1^2 = (-j + r)(r - r_1);$$

c'est la même relation que précédemment.

Remarque. — Cette propriété nous fournit une démonstration purement géométrique de la relation

$$\overline{\mathrm{MI}}^2 = \mathrm{MO}_1 \times \mathrm{MD}$$

du n° 61 ; il résulte, en effet, de ce lemme que le point j est l'intersection du cercle des inflexions avec la droite MO_1, c'est-à-dire qu'il se confond avec le point D et que par suite l'équation

$$\overline{\mathrm{MI}}^2 = \mathrm{MO}_1 \times \mathrm{M}j$$

n'est autre que la précédente.

Cela posé, connaissant les rayons de courbure MO_1 et NO_2 des roulettes de deux points, on aura d'abord le point I intersection de ces deux normales; on construira ensuite l'axe radical des deux cercles relatifs au point M, ce qui donnera une première droite sur laquelle se trouvera le point J; le point N en fournira une seconde et le point J sera à leur intersection. Ayant les points I et J, on pourra trouver le rayon de courbure d'une roulette quelconque.

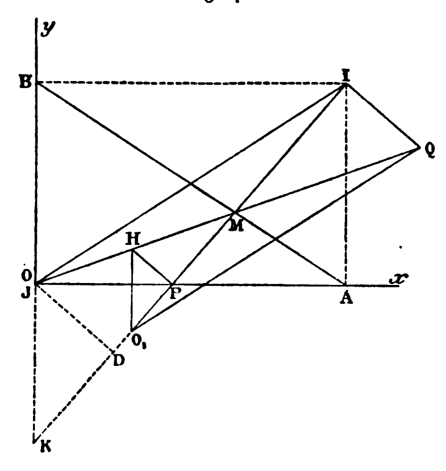
63. Au lieu de se donner un point M et le centre de courbure O_1 de sa roulette, on peut se donner une courbe mobile et son enveloppe, car alors le centre de courbure K de la courbe mobile et celui O_2 de son enveloppe sont dans les mêmes conditions que M et O_1. Toutefois la construction est en défaut si la courbe mobile est une droite, car son centre de courbure K est à l'infini et les deux cercles deviennent des droites perpendiculaires en I et O_2 à la droite IO_2 normale à la courbe enveloppe. Dans ce cas, il suffit de remarquer que le point L symétrique du centre de courbure O_2 par rapport au point I est sur le cercle des inflexions, donc J sera sur la perpendiculaire en L à IL, et cette droite remplacera alors l'axe radical.

64. *Centre de courbure de l'ellipse.* — Considérons l'ellipse décrite par un point M d'une droite AB (*fig.* 46) dont les extrémités s'appuient sur deux droites rectangulaire Ox et Oy; le point I est le centre instantané. Le point A décrivant une droite, le centre de courbure est à l'infini sur la normale et le cercle décrit sur le rayon de courbure comme diamètre est l'axe des x, cette droite est aussi l'axe radical relatif au point A; il en est de même de Oy pour le point B, et le point J se confond avec l'origine O. On arrive immédiatement à cette conséquence en remarquant que A et B sont des points d'inflexion pour leurs trajectoires, donc ces points appartiennent à la circonférence des inflexions qui, de plus, passe en I. Appliquant alors la construction de Savary modifiée, on a le centre de courbure O_1 de l'ellipse décrite par le point M.

On peut encore obtenir le centre de courbure d'une ellipse à l'aide du tracé suivant.

Soit P le point où la normale IM rencontre l'axe des x, élevons en ce point une perpendiculaire PH sur IM, puis menons par H où elle rencontre OM, une parallèle à Oy,

Fig. 46.



nous obtiendrons sur MI le centre de courbure O_1. Pour justifier cette construction, il faut démontrer que

$$\overline{IM}^2 = MO_1 \times MD,$$

D étant le pied de la perpendiculaire abaissée de J sur IM. On a en effet

$$\frac{MD}{MP} = \frac{MJ}{MH} = \frac{MK}{MO_1},$$

d'où

$$MO_1 \times MD = MP \times MK;$$

or

$$\frac{MK}{MI} = \frac{MB}{MA}, \qquad \frac{MP}{MI} = \frac{MA}{MB},$$

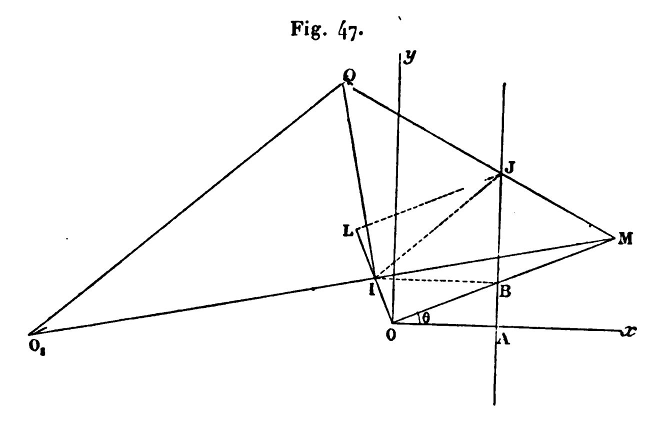
d'où

$$\overline{MI}^2 = MP \times MK = MO_1 \times MD. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Remarquant que IM est la normale en M à l'ellipse, on appliquera sans peine cette construction au cas d'une ellipse tracée.

65. *Centre de courbure de la conchoïde.* — Le point O est le centre de courbure de l'enveloppe de la droite

Fig. 47.



mobile MB (*fig.* 47), donc son symétrique L par rapport à I donne un point de la circonférence des inflexions; on en connaît d'ailleurs deux autres, le point B et le centre instantané I. Le point J est donc à l'intersection de LJ perpendiculaire sur OI et de la droite fixe AB. Connaissant J, il suffit d'appliquer la construction générale.

Recherchons le lieu des points d'inflexion de toutes les conchoïdes; soit M un de ces points, le quadrilatère LIBM sera inscrit dans le cercle des inflexions, ce qui donne

$$OM \times OB = OI \times OL = 2\overline{OI}^2,$$

or

$$OM = r, \qquad OB = \frac{a}{\cos\theta}, \qquad OI = OB \times \text{tang}\,\theta = \frac{a\sin\theta}{\cos^2\theta},$$

de sorte que l'équation précédente devient

$$\frac{ra}{\cos\theta} = \frac{2a^2 \sin^2\theta}{\cos^4\theta} \quad \text{ou} \quad r\cos^3\theta = 2a\sin^2\theta,$$

ou enfin

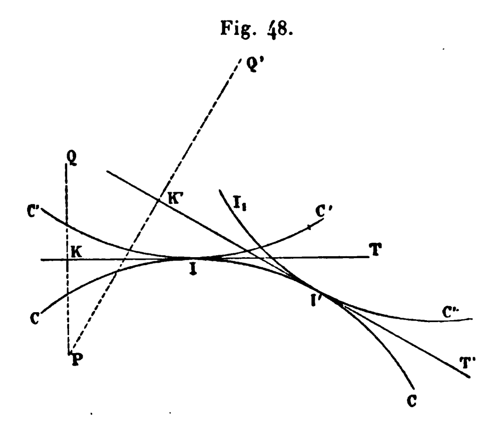
$$x^3 = 2ay^2;$$

le lieu cherché est une parabole semi-cubique.

ROULEMENT DE DEUX COURBES SYMÉTRIQUES.

66. Prenons pour base du mouvement une courbe quelconque C (*fig.* 48) et pour roulante la courbe symé-

Fig. 48.



trique C' relativement à leur tangente commune IT, *la roulante et la base resteront dans le mouvement, symétriques par rapport à la tangente commune;* en effet, les deux courbes C et C' sont égales et superposables par rotation de C' autour de IT, si donc C'' est une position quelconque de C' et I_1 le point de C'' qui était en I dans la position initiale, les courbes se toucheront au point I'

représentant deux points correspondants de C et C″, en vertu de l'égalité des arcs II′ et I_1I', donc ces deux courbes devront pouvoir coïncider par rotation de C″ autour de la tangente I′T′, ce qui exige qu'elles soient symétriques par rapport à cette droite.

Les roulettes des différents points de la figure mobile seront semblables aux diverses podaires de la base, car si P est un point quelconque du plan fixe, Q son symétrique par rapport à IT, dans le plan mobile C′, lorsque C′ viendra en C″, Q viendra en Q′ symétrique de P relativement à I′T′; or le lieu des points K′ est la podaire de la base relative au point P et comme $PQ' = 2PK'$, Q′ décrit une courbe semblable à cette podaire.

Enfin la relation

$$-\frac{1}{J} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$$

donne en vertu de la condition

$$R' = -R, \qquad J = -\frac{R}{2},$$

donc *le point* J *est au milieu du rayon de courbure de la roulante.*

67. Considérons, par exemple, le mouvement défini par le déplacement d'un angle droit APB dont un côté passe par un point A fixe sur la droite Ox (n° 46, 3°, *fig.* 30), tandis qu'un point B du second côté décrit la droite Oy, avec la condition $OA = PB = a$; on a vu que, dans ce cas, la base du mouvement est une parabole dont A est le foyer et Oy la directrice et la roulante une parabole égale ayant le point B pour foyer et PA pour dirc-

trice, ces courbes sont d'ailleurs symétriques par rapport à la tangente commune IC et elles ont respectivement pour sommets les points S et S′ tels que

$$OS = PS' = \frac{a}{2}.$$

D'après ce qui précède, le point S′ décrira une courbe semblable à la podaire de S par rapport à la base, car S et S′ sont symétriques relativement à la tangente IC, donc S′ décrira une cissoïde. La podaire du pied O de la directrice étant une strophoïde, son symétrique P décrira une strophoïde.

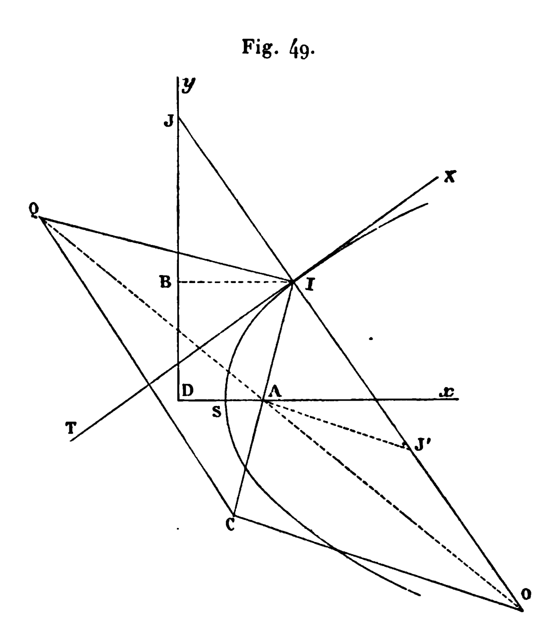
68. *Centre de courbure de la parabole.* — Regardons cette courbe comme étant la base du mouvement précédemment défini; nous connaissons deux points I et B du cercle des inflexions (*fig.* 49), de plus J doit se trouver sur la normale à la courbe, il est donc au point de rencontre de cette normale avec la directrice, et le centre de courbure O de la parabole s'obtient en prenant IO = 2 IJ, en sens contraire de cette droite IJ.

Cette construction peut être dirigée comme suit en se fondant sur l'égalité des triangles rectangles JBI et J′AI : joindre le point I considéré au foyer A de la parabole, mener en A la perpendiculaire à ce rayon vecteur jusqu'à sa rencontre en J′ avec la normale à la courbe et doubler la longueur IJ′. On arrive directement à cette dernière construction si l'on remarque que la circonférence des rebroussements passe par I et le point fixe A et qu'elle admet par suite IJ′ comme diamètre.

Ce qui précède permet de construire le rayon de courbure de la roulette décrite par un point quelconque du plan d'une parabole, qui roule sur une de ses tangentes;

prenons en particulier le foyer A, il suffira, en appliquant la construction de Savary, de mener AO jusqu'à sa rencontre en Q avec une perpendiculaire à IA et de mener par Q une parallèle à IO qui rencontrera la normale IA à la roulette du foyer au centre de courbure de cette roulette.

Fig. 49.



Il est aisé de reconnaître qu'on tombe ainsi sur le point C tel que $IC = 2 IA$, car de l'égalité des triangles rectangles AIQ et ACO on conclut que IQ est égal et parallèle à CO, donc la figure IQCO est un parallélogramme et QC est parallèle à IO. La roulette du foyer a donc son rayon de courbure AC égal et de sens contraire à sa normale AI, ce qui est une propriété caractéristique de la chaînette; nous retrouvons ainsi le résultat obtenu indirectement au n° 44, 2°.

d'où

$$r^2(g+h) = g^2h + h^2g + r_1^2(g+h)$$

ou

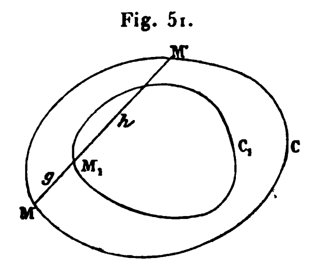
$$r^2 - r_1^2 = gh$$

et enfin

$$A - A_1 = \pi gh.$$

III. Considérons une courbe fermée C (*fig.* 51) et une corde MM′ de longueur constante, soient M_1 un point fixe

Fig. 51.



sur cette corde, situé à la distance g de M et h de M′, et C_1 la courbe décrite par ce point quand MM′ se meut; les points M et M′ engendrent la même courbe d'aire A, si donc A_1 est l'aire entourée par le lieu de M_1, on aura pour expression de l'aire annulaire comprise entre C et C_1

$$A - A_1 = \pi gh;$$

elle est indépendante de la courbe C.

Cette remarque est due à Holditch.

CONDITION POUR QU'UNE ROULETTE PRÉSENTE UN REBROUSSEMENT.

71. Il y a rebroussement de la trajectoire d'un point quand sa vitesse passe par zéro, car alors la projection de la vitesse sur un axe quelconque change de signe et par suite le mobile rebrousse chemin; or, si I est le centre

instantané, la vitesse d'un point M a pour expression $IM \times \omega$ et pour qu'elle soit nulle il faut que $IM = 0$ ou $\omega = 0$.

1° $IM = 0$, le point M coïncide avec le centre instantané, ce qui a lieu successivement pour les divers points de la roulante; la tangente de rebroussement est normale à la base.

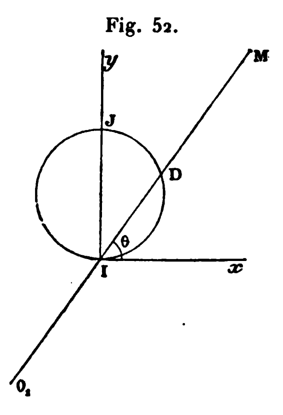
2° $\omega = 0$; de la relation

$$-\frac{1}{J} = \frac{\omega}{V} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$$

on déduit $R = R'$, c'est-à-dire que le centre de courbure de la roulante coïncide avec celui de la base. Ces deux courbes sont alors osculatrices et toutes les trajectoires présentent simultanément un point de rebroussement.

On peut se demander dans quels cas ces rebroussements

Fig. 52.

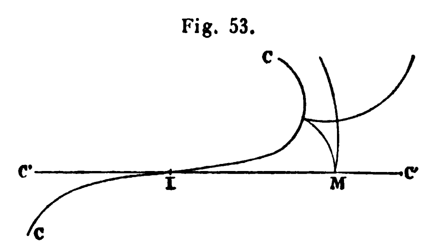


sont de première ou de seconde espèce. Pour le voir, calculons le rayon de courbure correspondant MO_1; on a (*fig.* 52)

$$MO_1 = \frac{\overline{MI}^2}{MD} = \frac{\overline{MI}^2}{MI - ID} = \frac{\overline{MI}^2}{MI - IJ \sin\theta},$$

mais si $\omega = 0$, IJ est infini et MO_1 nul, on a donc en général des points de rebroussement de première espèce. Cependant si $\theta = 0$, c'est-à-dire si le point M appartient à la tangente Ix, l'expression précédente prend une forme indéterminée; on vérifie alors que le rayon de courbure est fini, ce qui prouve que le rebroussement est de deuxième espèce. Si, par exemple, la roulante est une droite et qu'elle devienne osculatrice à la base, cette courbe présentera un point d'inflexion; la trajectoire d'un point quelconque de

Fig. 53.



la tangente d'inflexion aura un rebroussement de seconde espèce, puisqu'elle ne sera autre que la développante de la base (*fig.* 53); il n'y a d'exception que pour le point de contact I dont la trajectoire n'a pas de rebroussement. En général, si la base et la roulante deviennent osculatrices, toutes les roulettes ont des rebroussements de première espèce, si l'on excepte les points de la tangente commune qui ont des rebroussements de seconde espèce.

DU GLISSEMENT.

72. Une courbe mobile C′ restant toujours tangente à une courbe fixe C, on dit qu'il y a *glissement simple* lorsque le même point de C′ vient occuper successivement les divers points de C. Il y a roulement compliqué de glissement, ou plus simplement *glissement* lorsque le point

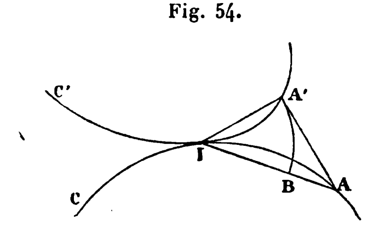
de contact change à la fois sur les deux courbes, mais sans que les arcs décrits par le point de contact sur ces courbes soient égaux.

Soient I et A les points de contact aux époques t et $t + \Delta t$, (*fig.* 54) A′ le point de C′ qui doit venir en A, on appelle *vitesse de glissement* la quantité géométrique

$$V_g = \lim \frac{A'A}{\Delta t};$$

il est aisé de reconnaître qu'elle est dirigée suivant la tangente commune aux deux courbes C et C′ et égale à la différence des vitesses de déplacement du point de contact sur chacune de ces courbes.

Fig. 54.



En effet, dans le triangle AIA′, A′A est au moins égal à la différence des infiniment petits du premier ordre IA et IA′, $A'A \geqq IA - IA'$; d'ailleurs si de I comme centre avec IA′ comme rayon on décrit l'arc de cercle A′B, A′A est au plus égal à la somme AB + A′B, or $AB = IA - IA'$ est du premier ordre et l'arc A′B du second, donc en négligeant les infiniment petits du second ordre, ce qui est permis si A′A est du premier ordre, c'est-à-dire s'il y a glissement, on a $A'A \leqq IA - IA'$. De ces deux inégalités il résulte que

$$A'A = IA - IA',$$

d'où, en divisant par Δt et passant à la limite,

$$V_g = V_A - V_{A'}.$$

D'ailleurs

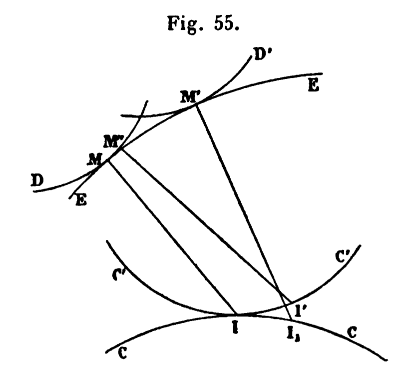
$$A'A = IA' \frac{\sin I}{\sin A},$$

ce qui exige, puisque A'A et IA' sont de même ordre, que l'angle A ait son sinus infiniment petit ou que la droite A'A ait la même direction limite que IA. C.Q.F.D.

73. *Glissement d'une courbe mobile sur son enveloppe.* — Soient (*fig.* 55) :

C et C' la base et la roulante,
D et D' deux positions infiniment voisines de la courbe et E son enveloppe,
M et M' les points de contact aux époques t et $t + \Delta t$,

Fig. 55.



I et I_1 les centres instantanés correspondants,
M'' le point de D qui doit venir en M'.

Il n'y a pas roulement de D sur E, car autrement D serait la roulante et E la base et il y aurait deux points M et I de vitesse nulle.

Le glissement est ici, par définition

$$\lim \frac{M''M'}{\Delta t} = \lim v_{M'} = v_M = \omega \times IM = V\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) \times IM.$$

DE L'ÉPICYCLOIDE.

74. L'épicycloïde est la courbe décrite par un point du plan d'un cercle mobile qui roule sur un cercle fixe. On distingue trois espèces d'épicycloïdes :

1° Les épicycloïdes ordinaires décrites par les points de la roulante.

2° Les épicycloïdes raccourcies fournies par les points intérieurs à la roulante.

3° Les épicycloïdes allongées provenant des points extérieurs à la roulante.

75. *Coordonnées d'un point de l'épicycloïde.* — Soient O le centre du cercle fixe, O' celui du cercle

Fig. 56.

mobile et M un point de la figure mobile (*fig.* 56). Si nous considérons le rayon O'B passant par M, on exprimera

qu'il y a roulement par la condition

$$\text{arc IA} = \text{arc IB}.$$

Prenons pour axe des y la droite OA, pour axe des x le diamètre perpendiculaire et désignons par R et R' les rayons des cercles O et O', R' étant pris positivement lorsque les deux cercles sont tangents intérieurement; posons

$$\theta = O'OA, \qquad \varphi = BO'I \qquad \text{et} \qquad a = O'M,$$

si a est inférieur à la valeur absolue de R' la trajectoire de M est une épicycloïde raccourcie, si a est égal à R', l'épicycloïde est ordinaire, enfin elle est allongée pour a supérieur à R'.

La condition arc IA = arc IB est exprimée par

$$R\theta = -R'\varphi;$$

on a d'ailleurs, en projetant le contour OO'M sur les axes et appelant K le point de rencontre de MO' avec OX,

$$x = OO' \times \cos O'Ox - O'M \times \cos \widehat{OKO'},$$
$$y = OO' \times \cos O'Oy + O'M \times \cos O'HO$$

ou

$$x = (R - R') \sin\theta - a \sin(\theta + \varphi),$$
$$y = (R - R') \cos\theta - a \cos(\theta + \varphi).$$

Posons

$$R - R' = -kR',$$

la relation $R\theta + R'\varphi = 0$ donne alors $\theta + \varphi = k\theta$, et les coordonnées x et y deviennent

$$x = -kR' \sin\theta - a \sin k\theta,$$
$$y = -kR' \cos\theta - a \cos k\theta.$$

76. *Points de rebroussement ou d'inflexion.* — Pour qu'il y ait rebroussement, il faut que le point M puisse venir dans une certaine position de la figure mobile, coïncider avec le centre instantané, ce qui n'est possible que pour les points de la roulante; donc les épicycloïdes ordinaires ont toujours un point de rebroussement et sont seules à en avoir.

La trajectoire de M présentera un point d'inflexion si le point M peut venir sur le cercle des inflexions dont le diamètre J est donné par la formule

$$-\frac{1}{J} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}, \qquad J = \frac{RR'}{R - R'};$$

J n'est positif que si $R > R' > 0$. Si, par exemple, les circonférences sont extérieures et que l'on pose $R' = -r$, on aura

$$-J = IJ = \frac{Rr}{R + r}.$$

IJ est inférieur au plus petit des deux rayons R et r et il y aura inflexion si $r - IJ < a < r$, car alors la circonférence de centre O' et de rayon a rencontrera le cercle des inflexions; dans le cas des cercles extérieurs, les épicycloïdes raccourcies sont donc les seules pouvant avoir des points d'inflexion.

Pour que la tangente en un point M passe par le centre O du cercle fixe, il faut que ce point M se trouve sur la circonférence décrite sur OI comme diamètre, ce qui exige que l'on ait, si les circonférences sont extérieures,

$$r < a < R + r;$$

cela ne peut se présenter que pour les épicycloïdes allongées.

77. *Formes particulières de l'épicycloïde.*

1° $a = 0$, l'épicycloïde se réduit à un cercle.

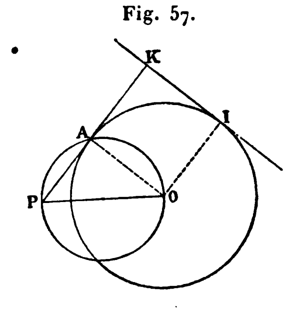
2° $R' = \infty$, la roulante devient une droite et ses différents points décrivent des développantes de cercle.

3° $R = \infty$, la base est une droite et les roulettes des cycloïdes ordinaires, allongées ou raccourcies, et ces dernières ont toujours des points d'inflexion.

4° $R' = \frac{R}{2}$, les épicycloïdes ordinaires se réduisent à des droites et les autres variétés à des ellipses.

5° $R' = -R$, on obtient pour trajectoires des limaçons de Pascal. En effet, la base et la roulante étant symétriques par rapport à la tangente commune, les roulettes sont semblables aux diverses podaires de la base; or la

Fig. 57.



podaire d'un cercle C relativement à un point quelconque P (*fig.* 57) est un limaçon de Pascal, car si l'on décrit un cercle sur PO comme diamètre et qu'on abaisse PK perpendiculaire sur une tangente quelconque au cercle C, on aura

$$PK = PA + AK = PA + R;$$

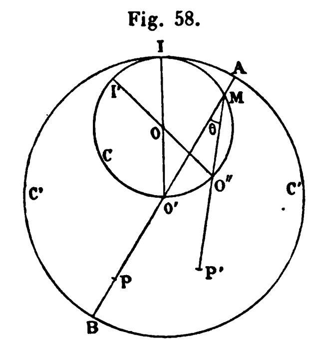
le lieu des points K s'obtient donc en prolongeant d'une longueur constante R, les rayons vecteurs du cercle de diamètre PO.

Si le point décrivant est sur la roulante, P est sur la base et le limaçon est une cardioïde.

6° $R' = 2R$, les trajectoires sont encore des limaçons de Pascal.

Soient, en effet, un cercle C′ (*fig.* 58), de centre O′ roulant sur un cercle fixe intérieur C, de centre O et de rayon moitié moindre, I la position initiale du point de contact, P le point décrivant et M le point où le rayon

Fig. 58.



PO′ coupe la circonférence C; le centre O′ décrira le cercle C et si O″ est sa position au temps t, le centre instantané sera en I′ à l'autre extrémité du diamètre O″OI; cherchons l'angle correspondant θ de la rotation. La formule

$$\omega = V\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right)$$

donne $\omega = \frac{V}{2R}$, or, sans changer la forme des roulettes, on peut supposer constante la vitesse V de déplacement du centre instantané, ce qui entraîne $\omega =$ constante, alors

$$\theta = \omega t = \frac{Vt}{2R} = \frac{II'}{2R} = \frac{O'O''}{2R}$$

et la droite MO″ fait précisément avec MP l'angle qui a

pour mesure $\frac{O'O''}{2R}$; donc le rayon $P'O''$ passe par le point fixe M et comme PO' est constant, la roulette de P est une conchoïde de cercle ou limaçon de Pascal. On obtient d'ailleurs la variété cardioïde du limaçon de Pascal si le point décrivant est sur la roulante.

La considération des mouvements relatifs (n° 47) conduit plus élégamment au même résultat. Soit, en effet, le cercle C roulant sur le cercle C′ de rayon double, le mouvement du plan fixe relativement au plan mobile sera celui de C′ sur C, que nous étudions, et puisque dans le mouvement réel le point M décrivait le diamètre AB, la droite $PO'M$ du plan fixe paraît pivoter autour du point M de la circonférence C, qui paraît fixe, tandis que le point O′ semble décrire cette circonférence; le point P paraît donc décrire un limaçon de Pascal, puisque la distance PO' de deux points du plan fixe est constante.

78. *Centre de courbure de l'épicycloïde ordinaire.* — Appliquons la construction de Savary. Soit M le point décrivant (*fig.* 59); menons MO', d'où le point Q sur la perpendiculaire IQ à IM; joignons QO, on a le point O_1 sur la normale MI, qui est le point cherché.

Le lieu du point O_1 est une épicycloïde ordinaire, car, les droites QA et IM normales à IQ étant parallèles, les deux triangles OO_1I et OQA sont semblables et donnent

$$\frac{OO_1}{OQ} = \frac{OI}{OA} = \frac{R}{R - 2R'} = \text{const},$$

donc le point O_1 décrit une courbe semblable à la trajectoire du point Q, c'est-à-dire une épicycloïde ordinaire, puisque le point Q diagonalement opposé à M est fixe sur la circonférence mobile.

On a aussi

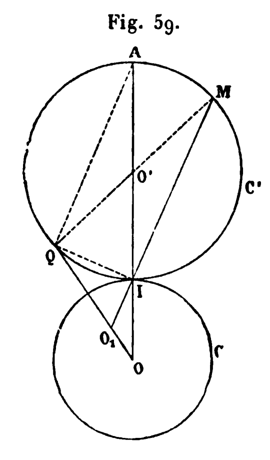
$$\frac{OO_1}{OQ} = \frac{IO_1}{AQ} = \frac{IO_1}{IM} = \frac{R}{R - 2R'},$$

d'où

$$\frac{2(R - R')}{R - 2R'} = \frac{IO_1 + IM}{IM} = \frac{MO_1}{IM};$$

donc le rapport $\frac{MO_1}{MI}$ est constant.

Fig. 59.



Dans le cas de la développante de cercle $R' = \infty$, par suite

$$\frac{MO_1}{MI} = 1;$$

donc le centre de courbure est au centre instantané.

Dans le mouvement cycloïdal R est infini, donc

$$\frac{MO_1}{MI} = 2;$$

on obtiendra le centre de courbure de la cycloïde en prolongeant la normale MI d'une longueur égale à elle-même.

Si $R' = \frac{R}{2}$, O_1 est rejeté à l'infini, dans ce cas l'épicycloïde se réduit à une droite.

Pour $R' = -R$, on a une cardioïde et $\frac{MO_1}{MI} = \frac{4}{3}$.

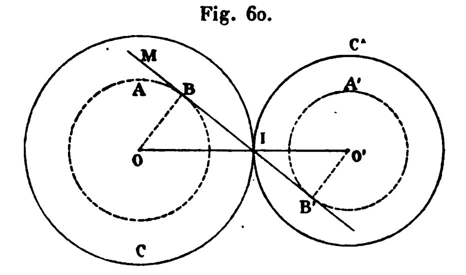
Enfin si $R' = 2R$, $\frac{MO_1}{MI} = \frac{2}{3}$.

79. *Enveloppes de diverses lignes invariablement liées à la figure mobile.* — 1° L'enveloppe d'un diamètre du cercle mobile est un épicycloïde ordinaire, (n° **46**, 4°).

2° L'enveloppe d'une développante d'un cercle concentrique à la roulante est une développante d'un cercle concentrique à la base.

Soit, en effet, A′ le cercle concentrique à la roulante

Fig. 60.



(*fig.* 60), M le point où une développante de ce cercle touche son enveloppe, pour la position C′ de la roulante; MI est normale à la développante mobile et à son enveloppe et par suite cette droite est tangente au cercle A′; de plus la perpendiculaire OB abaissée de O sur cette normale est constante, en vertu de la similitude des triangles IO′B′ et IOB, donc les normales aux différents points de l'enveloppe d'une développante du cercle A′ sont tangentes au cercle fixe A de rayon OB, et par suite cette enveloppe est une développante du cercle A.

80. *Longueur de l'arc de l'épicycloïde ordinaire.* — L'angle de la droite mobile BO′ (*fig.* 56) avec la droite fixe Oy étant égal à $\theta + \varphi$, l'élément d'arc décrit dans la rotation instantanée par le point B est

$$ds = \mathrm{IB} \times d(\varphi + \theta);$$

or

$$\mathrm{IB} = -2\mathrm{R}' \sin\frac{\varphi}{2},$$

et, comme il y a roulement, on a la relation

$$\mathrm{R}\theta = -\mathrm{R}'\varphi, \qquad d\theta = -\frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}d\varphi,$$

donc

$$ds = -2\mathrm{R}'\left(1 - \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

$$s = 4\mathrm{R}'\left(1 - \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right)\cos\frac{\varphi}{2} + \text{const}.$$

L'arc compris entre deux points de rebroussement consécutifs est

$$s = \left[4\mathrm{R}'\left(1 - \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right)\cos\frac{\varphi}{2}\right]_0^{2\pi} = -8\mathrm{R}'\left(1 - \frac{\mathrm{R}'}{\mathrm{R}}\right).$$

Pour la cycloïde R est infini, donc l'arc de cycloïde est égal à huit fois le rayon du cercle générateur.

La cardioïde s'obtient en faisant $\mathrm{R}' = -\mathrm{R}$, (ou encore $\mathrm{R}' = 2\mathrm{R}$) la formule précédente donne $s = 16\mathrm{R}$, donc l'arc de cardioïde est double de l'arc de cycloïde.

CHAPITRE III.

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME INVARIABLE AUTOUR D'UN POINT FIXE.

1. — Axe instantané de rotation.

81. Avant d'aborder l'étude du mouvement d'un solide ou système invariable dans toute sa généralité, il convient d'examiner le cas particulier où le corps présente un point fixe; l'étude géométrique de ce mouvement repose sur le théorème suivant :

Théorème. — *Dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, il existe à chaque instant une droite issue de ce point, dont tous les points ont une vitesse nulle, et les vitesses de tous les autres points du corps sont les mêmes que si le solide tournait autour de cette droite, qu'on appelle axe instantané de rotation.*

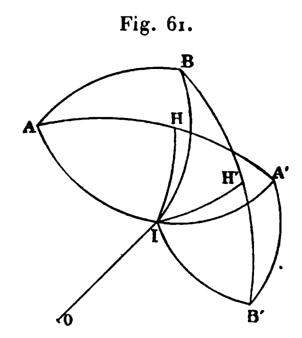
Ce théorème est dû à Euler et à d'Alembert; ce dernier y a été conduit en étudiant le mouvement de précession.

Nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — *On peut faire passer un solide qui présente un point fixe, d'une position à une autre, en le faisant tourner autour d'une droite passant par le point fixe.*

Du point fixe O, avec un rayon égal à l'unité, décrivons une sphère que nous supposons fixe, et soient A et B (*fig.* 61) deux points de cette sphère invariablement liés au solide; ils resteront constamment sur la sphère, et leurs positions à un instant quelconque détermineront celle du triangle AOB lié au solide et, par conséquent, celle du solide lui-même; il suffit alors d'étudier le déplacement sur la

Fig. 61.



sphère des deux points A et B ou de l'arc du grand cercle AB de longueur constante.

Soient donc AB, A'B', deux positions de cet arc, joignons AA', BB' par des arcs de grand cercle et élevons sur leurs milieux H et H' des arcs de grand cercle HI, H'I qui leur soient perpendiculaires, soit I leur point de rencontre; les deux triangles AIB, A'IB' équilatéraux entre eux sont égaux, donc il en est de même de leurs angles en I

$$\widehat{AIB} = \widehat{A'IB'};$$

d'où, ajoutant l'angle BIA',

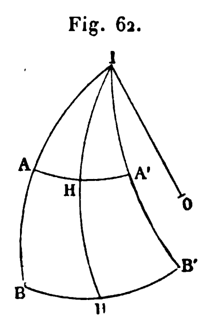
$$\widehat{AIA'} = \widehat{BIB'} = \alpha.$$

Donc, si l'on fait tourner la première figure de l'angle α

autour du rayon OI de la sphère, A viendra en A′, B en B′ et le solide aura passé de la première position à la seconde.

Il pourrait se faire que les arcs de grand cercle HI et H′I coïncidassent; dans ce cas, à cause de la symétrie, BA et

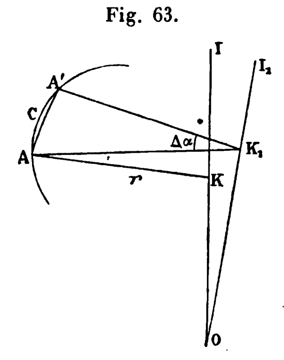
Fig. 62.



B′A′ vont se rencontrer sur ce grand cercle en I (*fig.* 62), on voit qu'il suffit alors de faire tourner la figure d'un angle convenable autour de OI.

Appliquons ce lemme à deux positions infiniment voisines du système aux époques t et $t + \Delta t$ et soient A et A′

Fig. 63.



(*fig.* 63) les positions correspondantes d'un même point, OI_1 l'axe de rotation et K_1 le centre du cercle que décri-

rait A dans la rotation autour de OI_1. Pour calculer la vitesse v de A dans le mouvement réel, on peut remplacer l'arc ACA' de trajectoire par l'arc de cercle AA' de centre K_1, qui a même corde, et l'on aura

$$v = \lim AK_1 \times \frac{\Delta\alpha}{\Delta t};$$

soient alors OI la position limite de OI_1 quand Δt tend vers zéro, et r la distance AK du point A à la droite OI. Posons

$$\omega = \lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta t},$$

il vient

$$v = r\omega,$$

ω ayant, comme $\Delta\alpha$, la même valeur pour tous les points à une époque donnée, mais variant généralement d'une époque à l'autre. En outre, la droite AA' est une perpendiculaire au plan mené par son milieu et la droite OI_1, donc à la limite la vitesse v est une perpendiculaire au plan mené par le point A et l'axe instantané OI.

Tout se passe donc, au point de vue des vitesses, comme s'il y avait rotation du solide à l'époque t, autour de OI, avec la vitesse angulaire ω.

Corollaire. — Les plans normaux aux vitesses, c'est-à-dire aux trajectoires des différents points du système à un instant donné, passent tous par une même droite OI.

82. Remarques. — I. On appelle *pôle instantané* le point I d'intersection de la sphère avec l'axe intantané; par ce point passent les arcs de grand cercle normaux aux trajectoires sphériques des différents points de la sphère. Autrement dit, les normales sphériques concourent en un même point qui est le pôle instantané I.

II. L'axe instantané OI change généralement de situation à chaque instant dans l'espace; il en est alors de même dans le solide. Car si OI et OI_1 sont deux positions infiniment voisines de l'axe instantané, ce n'est pas la droite OI du corps qui sera venue en OI_1, puisque OI était fixe, mais bien une autre droite OI′ de ce solide.

III. L'axe instantané du mouvement diurne est variable dans la Terre; ce n'est donc pas toujours le même point de la Terre qui est le pôle. On démontre que ce pôle instantané décrit sur la surface terrestre une circonférence de $0^m,27$ de rayon.

(DE SAINT-GERMAIN. — *Exercices de Mécanique,* p. 181.)

83. *Étude analytique du mouvement d'un solide qui présente un point fixe.* — L'étude géométrique de ce mouvement, que nous avons faite, est incomplète, en ce sens qu'elle ne nous permettrait pas de calculer la rotation à laquelle ce mouvement peut se ramener dans des circonstances déterminées.

Par le point fixe O faisons passer trois axes rectangulaires fixes Ox, Oy et Oz et trois autres axes rectangulaires OX, OY, OZ invariablement liés au corps, entraînés avec lui et formant un système direct comme le premier. Un point M du corps a des coordonnées fixes X, Y, Z et des coordonnées absolues x, y, z variables avec le temps.

Les formules de transformation des coordonnées nous donnent

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y = \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ z = \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z; \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} X = \alpha x + \beta y + \gamma z, \\ Y = \alpha' x + \beta' y + \gamma' z, \\ Z = \alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z; \end{cases}$$

les neufs cosinus directeurs sont des fonctions du temps, liées entre elles par les diverses formules que voici, et dont six seulement sont distinctes :

$$(3) \qquad \begin{cases} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \\ \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1, \\ \alpha''^2 + \beta''^2 + \gamma''^2 = 1; \end{cases}$$

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0, \\ \alpha''\alpha + \beta''\beta + \gamma''\gamma = 0, \\ \alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0; \end{cases}$$

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \\ \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1, \\ \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1; \end{cases}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0, \\ \gamma\alpha + \gamma'\alpha' + \gamma''\alpha'' = 0, \\ \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0; \end{cases}$$

$$(7) \qquad \begin{cases} \alpha = \beta'\gamma'' - \gamma'\beta'', & \alpha' = \ldots, & \alpha'' = \ldots, \\ \beta = \gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'', & \beta' = \ldots, & \beta'' = \ldots, \\ \gamma = \alpha'\beta'' - \beta'\alpha'', & \gamma' = \ldots, & \gamma'' = \ldots; \end{cases}$$

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = 1.$$

Cela posé, les composantes de la vitesse du point M s'obtiendront en dérivant les formules (1)

$$v_x = X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha'}{dt} + Z\frac{d\alpha''}{dt},$$

$$v_y = X\frac{d\beta}{dt} + Y\frac{d\beta'}{dt} + Z\frac{d\beta''}{dt},$$

$$v_z = X\frac{d\gamma}{dt} + Y\frac{d\gamma'}{dt} + Z\frac{d\gamma''}{dt};$$

ou, en fonction des coordonnées variables,

$$v_x = \frac{d\alpha}{dt}(\alpha x + \beta y + \gamma z) + \frac{d\alpha'}{dt}(\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)$$
$$+ \frac{d\alpha''}{dt}(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'' z).$$

. . . .

Mais, si l'on dérive les formules (5), on a

$$\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \alpha' \frac{d\alpha'}{dt} + \alpha'' \frac{d\alpha''}{dt} = 0,$$

. . . . ;

on peut donc écrire les composantes de la vitesse

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} v_x &= \left(\beta \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\alpha'}{dt} + \beta'' \frac{d\alpha''}{dt}\right) y + \left(\gamma \frac{d\alpha}{dt} + \gamma' \frac{d\alpha'}{dt} + \gamma'' \frac{d\alpha''}{dt}\right) z, \\ v_y &= \left(\gamma \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\beta''}{dt}\right) z + \left(\alpha \frac{d\beta}{dt} + \alpha' \frac{d\beta'}{dt} + \alpha'' \frac{d\beta''}{dt}\right) x, \\ v_z &= \left(\alpha \frac{d\gamma}{dt} + \alpha' \frac{d\gamma'}{dt} + \alpha'' \frac{d\gamma''}{dt}\right) x + \left(\beta \frac{d\gamma}{dt} + \beta' \frac{d\gamma'}{dt} + \beta'' \frac{d\gamma''}{dt}\right) y; \end{aligned} \right.$$

Or, si l'on dérive les formules (6), on trouve

$$\beta \frac{d\gamma}{dt} + \beta' \frac{d\gamma'}{dt} + \beta'' \frac{d\gamma''}{dt} = -\left(\gamma \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\beta'}{dt} + \gamma'' \frac{d\beta''}{dt}\right),$$

. . . . ;

on peut donc poser

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} p_1 &= \Sigma\beta \frac{d\gamma}{dt} = -\Sigma\gamma \frac{d\beta}{dt}, \\ q_1 &= \Sigma\gamma \frac{d\alpha}{dt} = -\Sigma\alpha \frac{d\gamma}{dt}, \\ r_1 &= \Sigma\alpha \frac{d\beta}{dt} = -\Sigma\beta \frac{d\alpha}{dt}, \end{aligned} \right.$$

et les composantes de la vitesse prennent alors la forme

$$(11)\qquad \begin{cases} v_x = q_1 z - r_1 y, \\ v_y = r_1 x - p_1 z, \\ v_z = p_1 y - q_1 x; \end{cases}$$

ce sont précisément les composantes de la vitesse d'un point tournant autour d'un axe passant par l'origine et ayant pour projections les quantités p_1, q_1 et r_1, qui sont seulement des fonctions du temps. Donc la vitesse du point considéré est bien la même que s'il tournait, avec le solide, autour d'un axe dont les équations sont

$$\frac{x}{p_1} = \frac{y}{q_1} = \frac{z}{r_1}$$

et la grandeur

$$\omega = \sqrt{p_1^2 + q_1^2 + r_1^2}.$$

84. *Projections de la vitesse d'un point sur les axes entraînés.* — Ces quantités v_X, v_Y, v_Z ne doivent pas être confondues avec les quantités $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$, qui sont nulles, puisque le point X, Y, Z est fixe par rapport aux axes mobiles.

On a

$$(v) \equiv (v_x) + (v_y) + (v_z),$$

d'où

$$\begin{aligned} v_X &= \alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z \\ &= \alpha\left(X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha'}{dt} + Z\frac{d\alpha''}{dt}\right) + \beta\left(X\frac{d\beta}{dt} + Y\frac{d\beta'}{dt} + Z\frac{d\beta''}{dt}\right) \\ &\qquad + \gamma\left(X\frac{d\gamma}{dt} + Y\frac{d\gamma'}{dt} + Z\frac{d\gamma''}{dt}\right); \end{aligned}$$

le coefficient de X est nul et il reste

$$(12)\quad \begin{cases} v_X = \left(\alpha\frac{d\alpha'}{dt} + \beta\frac{d\beta'}{dt} + \gamma\frac{d\gamma'}{dt}\right)Y + \left(\alpha\frac{d\alpha''}{dt} + \beta\frac{d\beta''}{dt} + \gamma\frac{d\gamma''}{dt}\right)Z, \\ v_Y = \left(\alpha'\frac{d\alpha''}{dt} + \beta'\frac{d\beta''}{dt} + \gamma'\frac{d\gamma''}{dt}\right)Z + \left(\alpha'\frac{d\alpha}{dt} + \beta'\frac{d\beta}{dt} + \gamma'\frac{d\gamma}{dt}\right)X, \\ v_Z = \left(\alpha''\frac{d\alpha}{dt} + \beta''\frac{d\beta}{dt} + \gamma''\frac{d\gamma}{dt}\right)X + \left(\alpha''\frac{d\alpha'}{dt} + \beta''\frac{d\beta'}{dt} + \gamma''\frac{d\gamma'}{dt}\right)Y. \end{cases}$$

Posons maintenant

$$(13)\quad \begin{cases} p = \Sigma\alpha''\frac{d\alpha'}{dt} = -\Sigma\alpha'\frac{d\alpha''}{dt}, \\ q = \Sigma\alpha\frac{d\alpha''}{dt} = -\Sigma\alpha''\frac{d\alpha}{dt}, \\ r = \Sigma\alpha'\frac{d\alpha}{dt} = -\Sigma\alpha\frac{d\alpha'}{dt}; \end{cases}$$

il viendra

$$(14)\quad \begin{cases} v_X = qZ - rY, \\ v_Y = rX - pZ, \\ v_Z = pY - qX; \end{cases}$$

ce sont les expressions cherchées; elles démontrent à nouveau l'existence de l'axe instantané, car elles représentent les projections sur les axes mobiles de la vitesse du point X, Y, Z tournant autour d'un certain axe de rotation ayant p, q, r pour projections sur les axes entraînés.

On a donc la relation

$$(15)\qquad p^2 + q^2 + r^2 = p_1^2 + q_1^2 + r_1^2 = \omega^2.$$

Enfin il convient de remarquer que les Σ qui figurent dans p, q, r se rapportent aux lettres et ceux de p_1, q_1, r_1 aux accents.

85. *Autres relations entre les cosinus directeurs et leurs dérivées.* — Les relations (13) définissent les quan-

tités p, q, r et permettent inversement de trouver par exemple $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$ et $\frac{d\gamma}{dt}$ en fonction des cosinus directeurs des axes mobiles et des composantes de la rotation instantanée.

Les trois formules contenant les dérivées cherchées sont

$$-q = \Sigma\alpha'' \frac{d\alpha}{dt} = \alpha'' \frac{d\alpha}{dt} + \beta'' \frac{d\beta}{dt} + \gamma'' \frac{d\gamma}{dt},$$

$$r = \Sigma\alpha' \frac{d\alpha}{dt} = \alpha' \frac{d\alpha}{dt} + \beta' \frac{d\beta}{dt} + \gamma' \frac{d\gamma}{dt},$$

$$0 = \Sigma\alpha \frac{d\alpha}{dt} = \alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt},$$

d'où les relations

$$(16) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} &= -q\alpha'' + r\alpha', \\ \frac{d\beta}{dt} &= -q\beta'' + r\beta', \\ \frac{d\gamma}{dt} &= -q\gamma'' + r\gamma', \end{aligned} \right.$$

et les suivantes

$$(16\ bis) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha'}{dt} &= -r\alpha + p\alpha'', \\ \frac{d\beta'}{dt} &= -r\beta + p\beta'', \\ \frac{d\gamma'}{dt} &= -r\gamma + p\gamma'', \end{aligned} \right.$$

$$(16\ ter) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha''}{dt} &= -p\alpha' + q\alpha, \\ \frac{d\beta''}{dt} &= -p\beta' + q\beta, \\ \frac{d\gamma''}{dt} &= -p\gamma' + q\gamma. \end{aligned} \right.$$

On en déduit encore

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &p\,\frac{d\alpha}{dt}+q\,\frac{d\alpha'}{dt}+r\,\frac{d\alpha''}{dt}=0,\\ &p\,\frac{d\beta}{dt}+q\,\frac{d\beta'}{dt}+r\,\frac{d\beta''}{dt}=0,\\ &p\,\frac{d\gamma}{dt}+q\,\frac{d\gamma'}{dt}+r\,\frac{d\gamma''}{dt}=0. \end{aligned}\right.$$

2. — Mouvement épicycloïdal sphérique.

86. *Méthode géométrique.* — Poinsot, auquel est due la notion de l'axe instantané de rotation, a montré que le mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe peut être ramené au roulement d'un cône mobile sur un cône fixe, ces cônes ayant pour sommet commun le point fixe.

On dit que deux cônes de même sommet O roulent l'un sur l'autre, si les courbes d'intersection de ces cônes par la sphère de centre O et de rayon égal à l'unité roulent l'une sur l'autre, le roulement étant défini comme dans le mouvement plan, par le contact des courbes et l'égalité des arcs compris entre le point de contact et des points fixes pris sur ces courbes.

Si les deux courbes sont deux petits cercles de la sphère, les deux cônes seront de révolution et les points de la figure sphérique décrivent des *épicycloïdes sphériques*.

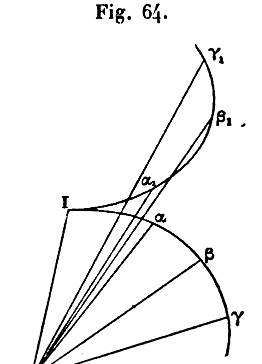
Si la roulante devient un grand cercle, le cône correspondant est un plan et les roulettes sphériques prennent le nom de *développantes sphériques*.

Théorème. — *Le mouvement le plus général d'un solide qui présente un point fixe, se ramène au roulement d'un cône invariablement lié au corps solide,*

sur un cône fixe. Le cône fixe est le lieu des axes instantanés dans l'espace et le cône roulant le lieu des droites du corps qui deviennent successivement axes instantanés.

Soient OI (*fig.* 64) l'axe instantané à l'époque t; $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, ..., les axes instantanés aux époques $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$, ...; $O\alpha_1$, $O\beta_1$, $O\gamma_1$, ... les droites du corps, dans sa position à l'instant t, qui deviendront suc-

Fig. 64.



cessivement axes instantanés à ces mêmes époques et enfin I, α, β, γ, ..., α_1, β_1, γ_1, ... les intersections de ces diverses droites par la sphère de rayon égal à l'unité. Joignons ces points par des arcs de grands cercles. La rotation infiniment petite qui se fait autour de OI amène $O\alpha_1$ en $O\alpha$, donc $\text{arc}\, I\alpha_1 = \text{arc}\, I\alpha$, on verra de même que $\alpha_1\beta_1 = \alpha\beta$, $\beta_1\gamma_1 = \beta\gamma$, ...; dans cette suite de mouvements le polygone sphérique $I\alpha_1\beta_1\gamma_1$ ... roule sur $I\alpha\beta\gamma$ ..., donc en faisant tendre Δt vers zéro, on aura deux courbes sphériques, limites des polygones inscrits et qui rouleront l'une sur l'autre.

87. *Etude analytique du mouvement épicycloïdal sphérique.*

Soient $OA = \omega$ l'axe de la rotation instantanée à l'époque t; p, q, r ses projections sur les axes mobiles; A, B, C les coordonnées du point A par rapport aux axes fixes.

Cherchons d'abord les équations des cônes base et roulant.

1° *Equation du cône base.* — Le point A différent de I, ne se meut pas en général sur une sphère parce que ω est variable; ses coordonnées par rapport aux axes fixes sont

$$A = p\alpha + q\alpha' + r\alpha'',$$
$$B = p\beta + q\beta' + r\beta'',$$
$$C = p\gamma + q\gamma' + r\gamma'',$$

et les équations de la droite OA dans le système fixe sont

$$(18) \qquad \frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{r}{C},$$

A, B, C étant des fonctions du temps; l'élimination de t entre les équations (18) donnera l'équation du cône base.

2° *Equation du cône roulant.* — Pour établir l'équation de ce cône rapporté aux axes fixes à l'époque t_0, considérons la droite OA_1 du corps qui doit devenir axe instantané à l'époque t; cette droite faisant partie du corps a toujours mêmes projections sur les axes entraînés et comme elle aura pour projections p, q, r à l'époque t, ce seront aussi ses projections à l'époque t_0. Donc, à cette époque t_0, elle aura pour projections sur les axes fixes

$$A_1 = p\alpha_0 + q\alpha'_0 + r\alpha''_0,$$
$$B_1 = p\beta_0 + q\beta'_0 + r\beta''_0,$$
$$C_1 = p\gamma_0 + q\gamma'_0 + r\gamma''_0;$$

par suite les équations de cette droite sont

$$(19) \qquad \frac{x}{A_1} = \frac{y}{B_1} = \frac{z}{C_1}.$$

Eliminant t entre les équations (19), on aura l'équation du cône roulant dans la position qu'il occupe à l'époque t_0.

Les équations (18) et (19) peuvent d'ailleurs être considérées comme représentant l'une le cône base, l'autre le cône roulant, puisqu'elles donnent les génératrices de ces surfaces en fonction du paramètre variable t.

88. Les équations de ces cônes étant obtenues, il faut montrer que ces surfaces ont même plan tangent à l'époque arbitrairement choisie $t = t_0$.

Le plan tangent au premier cône, le long d'une génératrice est la limite d'un plan mené par les deux droites

$$\frac{x}{A} = \frac{y}{B} = \frac{z}{C}, \qquad \frac{x}{A + \Delta A} = \frac{y}{B + \Delta B} = \frac{z}{C + \Delta C},$$

ou par l'origine et les deux points (A, B, C), ($A + \Delta A$, $B + \Delta B$, $C + \Delta C$); son équation est donc

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \Delta A & \Delta B & \Delta C \end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ A & B & C \\ \dfrac{dA}{dt} & \dfrac{dB}{dt} & \dfrac{dC}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

On aura de même pour le plan tangent au second cône

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ \dfrac{dA_1}{dt} & \dfrac{dB_1}{dt} & \dfrac{dC_1}{dt} \end{vmatrix} = 0.$$

Or, à l'époque $t = t_0$, on a évidemment $A = A_1$, $B = B_1$, $C = C_1$, il reste à prouver qu'il en est de même des dérivées de ces quantités. En tenant compte de la relation (17) on a

$$\frac{dA}{dt} = \alpha \frac{dp}{dt} + \alpha' \frac{dq}{dt} + \alpha'' \frac{dr}{dt};$$

d'ailleurs

$$\frac{dA_1}{dt} = \alpha_0 \frac{dp}{dt} + \alpha'_0 \frac{dq}{dt} + \alpha''_0 \frac{dr}{dt},$$

donc, à l'époque t_0, on a bien

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA_1}{dt}, \qquad \frac{dB}{dt} = \frac{dB_1}{dt}, \qquad \frac{dC}{dt} = \frac{dC_1}{dt};$$

les plans tangents sont les mêmes et les deux cônes sont tangents suivant l'axe instantané.

89. Cela posé, la courbe d'intersection du premier cône par la sphère de rayon égal à l'unité, ou le lieu des pôles instantanés a pour équations

$$(20) \qquad x = \frac{A}{\omega}, \qquad y = \frac{B}{\omega}, \qquad z = \frac{C}{\omega};$$

calculons la différentielle ds de l'arc de cette courbe :

$$ds^2 = \Sigma\, dx^2 = \Sigma \frac{(\omega\, dA - A\, d\omega)^2}{\omega^4}$$
$$= \frac{\omega^2 \Sigma\, dA^2 + d\omega^2 \Sigma\, A^2 - 2\omega\, d\omega\, \Sigma\, A\, dA}{\omega^4}.$$

On a d'ailleurs

$$\Sigma A^2 = A^2 + B^2 + C^2 = \omega^2, \qquad \Sigma\, A\, dA = \omega\, d\omega,$$
$$dA = \alpha\, dp + \alpha'\, dq + \alpha''\, dr,$$

d'où

$$\Sigma\, dA^2 = dp^2 + dq^2 + dr^2 = \Sigma\, dp^2;$$

on a donc finalement

$$ds^2 = \frac{\Sigma\, dp^2 - d\omega^2}{\omega^2}.$$

Les quantités α, β, γ ne figurant pas dans cette expression, on trouverait, par un calcul analogue, même résultat pour ds_1^2. Donc $s - s_1 =$ const. et il y a roulement.

3. — Accélération dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe.

90. *Projections de l'accélération d'un point sur les axes fixes.* — Les composantes γ_x, γ_y et γ_z de l'accélération d'un point s'obtiendront en dérivant les formules

$$\begin{aligned} v_x &= q_1 z - r_1 y, \\ v_y &= r_1 x - p_1 z, \\ v_z &= p_1 y - q_1 x; \end{aligned}$$

d'où

$$\gamma_x = z \frac{dq_1}{dt} - y \frac{dr_1}{dt} + q_1 \frac{dz}{dt} - r_1 \frac{dy}{dt}$$

ou, en remplaçant $\frac{dz}{dt} = v_z$ et $\frac{dy}{dt} = v_y$ par leurs valeurs,

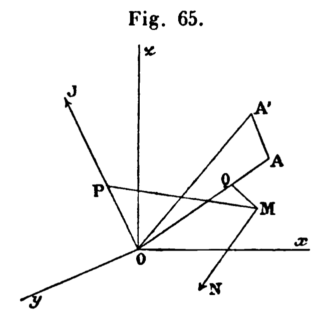
$$\begin{aligned} \gamma_x &= z \frac{dq_1}{dt} - y \frac{dr_1}{dt} + q_1 (p_1 y - q_1 x) - r_1 (r_1 x - p_1 z) \\ &= z \frac{dq_1}{dt} - y \frac{dr_1}{dt} + p_1 (q_1 y + r_1 z) - x (q_1^2 + r_1^2) \\ &= z \frac{dq_1}{dt} - y \frac{dr_1}{dt} + p_1 (p_1 x + q_1 y + r_1 z) - \omega^2 x. \end{aligned}$$

On a donc, pour les composantes cherchées,

$$(21) \qquad \left\{ \begin{aligned} \gamma_x &= z \frac{dq_1}{dt} - y \frac{dr_1}{dt} + p_1 \Sigma p_1 x - \omega^2 x, \\ \gamma_y &= x \frac{dr_1}{dt} - z \frac{dp_1}{dt} + q_1 \Sigma p_1 x - \omega^2 y, \\ \gamma_z &= y \frac{dp_1}{dt} - x \frac{dq_1}{dt} + r_1 \Sigma p_1 x - \omega^2 z. \end{aligned} \right.$$

91. *Accélération angulaire.* — Les quantités $\frac{dp_1}{dt}$, $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dr_1}{dt}$ sont les composantes de la vitesse avec laquelle se déplace dans l'espace le point $(p_1\, q_1\, r_1)$, c'est-à-dire le point A extrémité de l'axe de rotation, regardé non pas comme lié au solide, car étant sur l'axe de rotation il a une vitesse nulle, mais considéré comme le point de

Fig. 65.



l'espace qui prend successivement les diverses positions du point A sur le cône base; autrement dit, si A′ est le nouveau point A à l'époque $t + \Delta t$ (*fig.* 65), $\frac{dp_1}{dt}$, $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dr_1}{dt}$ sont les composantes de la quantité géométrique

$$\gamma_\omega = \lim \frac{AA'}{\Delta t}.$$

On appelle *accélération angulaire* la grandeur géométrique $OJ = \gamma_\omega$ passant par le point O et qui a par conséquent pour composantes $\frac{dp_1}{dt}$, $\frac{dq_1}{dt}$, $\frac{dr_1}{dt}$. Son nom lui vient de ce que l'on traite ω et $\omega + d\omega$ comme des vitesses pour former le triangle de l'accélération angulaire.

L'accélération angulaire étant parallèle à la droite AA′

tangente à la courbe lieu des points A, est dans le plan tangent commun aux cônes base et roulant, le long de l'axe instantané OA.

Les équations (21) nous montrent que l'accélération d'un point M peut être considérée comme la somme géométrique de deux autres; la première ayant pour projections sur les axes

$$\frac{dq_1}{dt}z - \frac{dr_1}{dt}y, \qquad \frac{dr_1}{dt}x - \frac{dp_1}{dt}z, \qquad \frac{dp_1}{dt}y - \frac{dq_1}{dt}x,$$

est due à l'accélération angulaire, on voit que ses composantes sont celles de la vitesse qu'aurait le point M s'il tournait autour de OJ considéré comme axe de rotation; elle est donc dirigée suivant la droite MN perpendiculaire au plan MOJ, et égale à OJ multiplié par MP distance du point M à la droite OJ.

Quant à la seconde accélération, elle est nécessairement ce que deviendrait l'accélération de M si l'accélération angulaire était nulle, c'est-à-dire si l'axe instantané était constant de grandeur et de direction; or, dans ce cas, l'accélération serait centripète, c'est-à-dire dirigée suivant la perpendiculaire MQ à l'axe de rotation et égale à $\mathrm{MQ} \times \overline{\mathrm{OA}}^2$. Il est d'ailleurs facile de le vérifier en prenant l'axe de rotation pour axe des z; on aura alors

$$p_1 = q_1 = 0, \qquad r_1 = \omega,$$

et les composantes de la seconde accélération se réduisent à

$$-\omega^2 x, \qquad -\omega^2 y, \qquad 0,$$

ce qui prouve que cette accélération est centripète.

De ce qui précède résulte le théorème suivant dû à Rivals.

THÉORÈME. — *Dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe, l'accélération d'un point est la somme géométrique de deux accélérations :*

La première due à l'accélération angulaire est normale au plan du point considéré et de l'accélération angulaire et égale au produit de cette accélération par sa distance au point considéré.

La seconde, qui est l'accélération centripète, est menée suivant la perpendiculaire abaissée du point sur l'axe de rotation, et égale au produit de cette distance par le carré de l'axe instantané.

Ce théorème permet de construire le plan osculateur et le rayon de courbure de la trajectoire d'un point.

92. *Vitesse de roulement.* — La vitesse de déplacement du pôle instantané I, sur la sphère de rayon égal à l'unité, se nomme *vitesse de roulement;* on l'introduit souvent de préférence à l'accélération angulaire dans les formules qui donnent les composantes de l'accélération d'un point.

Soient a, b, c les coordonnées du pôle instantané, on a

$$p_1 = \omega a, \qquad q_1 = \omega b, \qquad r_1 = \omega c,$$

d'où

$$\frac{dp_1}{dt} = \omega \frac{da}{dt} + a \frac{d\omega}{dt},$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \omega \frac{db}{dt} + b \frac{d\omega}{dt},$$

$$\frac{dr_1}{dt} = \omega \frac{dc}{dt} + c \frac{d\omega}{dt}.$$

Or $\frac{da}{dt}, \frac{db}{dt}, \frac{dc}{dt}$ sont les composantes de la vitesse de roulement V, en sorte que si l'on désigne par a', b', c' les

cosinus directeurs de cette vitesse, on aura

$$\frac{da}{dt}=\mathrm{V}a', \qquad \frac{db}{dt}=\mathrm{V}b', \qquad \frac{dc}{dt}=\mathrm{V}c',$$

et par suite

$$\begin{aligned}\frac{dp_1}{dt}&=\omega\mathrm{V}a'+a\frac{d\omega}{dt},\\ \frac{dq_1}{dt}&=\omega\mathrm{V}b'+b\frac{d\omega}{dt},\\ \frac{dr_1}{dt}&=\omega\mathrm{V}c'+c\frac{d\omega}{dt}.\end{aligned}$$

Substituant dans les formules (21), les valeurs de p_1, q_1, r_1 et de leurs dérivées, nous aurons

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned}\gamma_x&=\omega\mathrm{V}(zb'-yc')+\frac{d\omega}{dt}(zb-yc)+\omega^2 a\,\Sigma\,ax-\omega^2 x,\\ \gamma_y&=\omega\mathrm{V}(xc'-za')+\frac{d\omega}{dt}(xc-za)+\omega^2 b\,\Sigma\,ax-\omega^2 y,\\ \gamma_z&=\omega\mathrm{V}(ya'-xb')+\frac{d\omega}{dt}(ya-xb)+\omega^2 c\,\Sigma\,ax-\omega^2 z.\end{aligned}\right.$$

Les termes renfermant la vitesse V proviennent de la variation de position de l'axe instantané, ce seraient les seuls qui disparaîtraient si l'on supposait $\mathrm{V}=0$, c'est-à-dire cet axe fixe de position et non de grandeur, dans l'espace. Les autres termes représentent par suite les composantes de l'accélération tangentielle et de l'accélération centripète, dans le mouvement d'un corps autour d'un axe fixe.

93. *Détermination des composantes de l'accélération avec un choix particulier d'axes coordonnés.* — Quand, dans un problème, on se place à une époque donnée, il est commode de prendre l'axe instantané de la rotation

pour axe des z, ce qui entraîne

$$p_1 = q_1 = 0, \qquad r_1 = \omega,$$

et le plan tangent aux deux cônes pour plan des zx; on voit que l'accélération angulaire γ_ω étant dans le plan zOx, il faut faire en outre dans les formules (21) $\frac{dq_1}{dt} = 0$; ces formules deviennent alors

$$(23) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_x &= -y\frac{dr_1}{dt} - \omega^2 x, \\ \gamma_y &= x\frac{dr_1}{dt} - z\frac{dp_1}{dt} - \omega^2 y, \\ \gamma_z &= y\frac{dp_1}{dt}. \end{aligned} \right.$$

Quant aux formules (22), on voit qu'avec ce même choix d'axes il faut y faire d'abord

$$a = b = 0, \qquad c = 1;$$

remarquant ensuite que la vitesse V est perpendiculaire à OI dans le plan zOx et par suite parallèle à Ox, on a, si l'on prend Ox de même sens que V,

$$b' = c' = 0, \qquad a' = 1;$$

d'où

$$(24) \quad \left\{ \begin{aligned} \gamma_x &= -y\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 x, \\ \gamma_y &= -\omega V + x\frac{d\omega}{dt} - \omega^2 y, \\ \gamma_z &= \omega V y. \end{aligned} \right.$$

On retrouve aisément ces dernières formules si l'on remarque que les termes contenant V ne sont autres que

les moments [1] par rapport aux axes coordonnés de la quantité géométrique $-\omega V$ menée par le point M parallèlement à la vitesse de roulement; quant aux autres termes, ce seraient les projections sur les mêmes axes des composantes tangentielle et centripète de l'accélération si Oz était fixe (n° 51).

REMARQUES. — I. Il n'y a qu'un point d'accélération nulle, le point fixe O. En effet, si dans les formules (24) on fait

$$\gamma_x = \gamma_y = \gamma_z = 0,$$

il vient, en supposant $\omega V \gtrless 0$,

$$y = 0, \qquad x = 0, \qquad z = 0.$$

Toutefois, si $\omega V = 0$, on a seulement $x = 0$, $y = 0$ et tous les points de l'axe de rotation ont une accélération nulle.

II. L'accélération d'un point de l'axe instantané, dans le cas général $\omega V \gtrless 0$, est parallèle à Oy et égale à $-\omega V z$.

94. *Projections de l'accélération d'un point sur les axes entraînés.* — Ces projections ont absolument les mêmes formes que les projections sur les axes fixes, sauf le changement de x, y, z en X, Y, Z et de p_1, q_1, r_1 en p, q, r.

Prenons en effet des axes fixes coïncidant à l'époque

---

[1] On appelle moment d'une droite par rapport à un axe le moment de la projection de cette droite sur un plan perpendiculaire à l'axe, par rapport au pied de l'axe. On donne le signe + ou le signe — à ce moment, suivant que le sens de rotation de la droite relativement au pied de l'axe est lui-même positif ou négatif.

considérée avec les axes mobiles, on aura

$$\gamma_x = \gamma_X, \qquad \gamma_y = \gamma_Y, \qquad \gamma_z = \gamma_Z;$$
$$x = X, \qquad y = Y, \qquad z = Z;$$
$$p_1 = p, \qquad q_1 = q, \qquad r_1 = r;$$

mais il reste à prouver que

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{dp}{dt}, \qquad \frac{dq_1}{dt} = \frac{dq}{dt}, \qquad \frac{dr_1}{dt} = \frac{dr}{dt}.$$

Or on a généralement

$$p_1 = \alpha p + \alpha' q + \alpha'' r.$$

d'où, en vertu des relations (17),

$$\frac{dp_1}{dt} = \alpha \frac{dp}{dt} + \alpha' \frac{dq}{dt} + \alpha'' \frac{dr}{dt},$$

et comme

$$\alpha = 1, \qquad \alpha' = 0, \qquad \alpha'' = 0,$$

on a bien

$$\frac{dp_1}{dt} = \frac{dp}{dt}.$$

En résumé, on a les formules

$$(25) \quad \begin{cases} \gamma_X = Z \dfrac{dq}{dt} - Y \dfrac{dr}{dt} + p\, \Sigma pX - \omega^2 X, \\ \gamma_Y = X \dfrac{dr}{dt} - Z \dfrac{dp}{dt} + q\, \Sigma pX - \omega^2 Y, \\ \gamma_Z = Y \dfrac{dp}{dt} - X \dfrac{dq}{dt} + r\, \Sigma pX - \omega^2 Z; \end{cases}$$

les quantités $\frac{dp}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{dr}{dt}$ sont, d'après ce qui précède, les projections de l'accélération angulaire sur les axes mobiles.

On a encore

$$(26)\quad \begin{cases} \gamma_X = \omega V(Zb' - Yc') + \dfrac{d\omega}{dt}(Zb - Yc) + \omega^2(a\Sigma aX - X), \\ \gamma_Y = \omega V(Xc' - Za') + \dfrac{d\omega}{dt}(Xc - Za) + \omega^2(b\Sigma aX - Y), \\ \gamma_Z = \omega V(Ya' - Xb') + \dfrac{d\omega}{dt}(Ya - Xb) + \omega^2(c\Sigma aX - Z). \end{cases}$$

Dans ces formules, a, b, c, a', b', c' sont les cosinus directeurs de l'axe instantané de rotation et de la vitesse de roulement par rapport aux axes mobiles.

4. — Centres de courbure géodésique.

95. *Relation entre la vitesse angulaire de rotation et la vitesse de roulement.* — Désignons par ω la vitesse angulaire, V la vitesse de roulement, α et α' les angles de l'axe instantané avec les droites polaires des deux courbes sphériques S et S', intersections des cônes base et roulant avec la sphère de rayon égal à l'unité; on a la relation

$$(27)\qquad \frac{\omega}{V} = \frac{1}{\tan\alpha} \pm \frac{1}{\tan\alpha'},$$

on prendra le signe + ou le signe — suivant que les courbures des courbes S et S' seront ou non opposées, c'est-à-dire suivant que les deux cônes seront extérieurs ou intérieurs au voisinage de la génératrice de contact.

Soient en effet :

K le point fixe sommet des deux cônes (*fig.* 66);

I le pôle instantané;

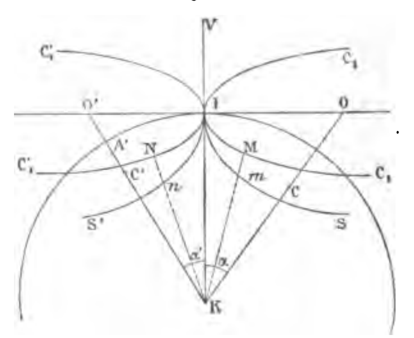
C le centre de courbure de la courbe S en I, c'est le point de rencontre de la droite polaire KC avec le plan osculateur à la courbe en I;

O le point où la droite polaire KC de la courbe S rencontre le plan tangent en I;

C_1 et C'_1 les courbes que détermine ce plan tangent dans les cônes base et roulant, ou les perspectives sur ce plan des courbes S et S′, l'œil étant en K.

Le point O est le centre de courbure de la courbe C_1, car la section oblique faite dans le cône par le plan osculateur

Fig. 66.



de S a pour section normale correspondante la courbe C_1, elle a d'ailleurs C pour centre de courbure, puisque la courbe S est à la fois sur le cône et sur la sphère; or, d'après le théorème de Meusnier, ce point C doit être la projection sur le plan oblique du centre de courbure de la section normale C_1, donc le centre de courbure de C_1 est en O sur le prolongement de la normale KC au plan osculateur de S.

De même le centre de courbure de C'_1 est en O′ et les trois points O, I et O′ sont en ligne droite sur la normale à la vitesse V.

Cela posé, les arcs infiniment petits correspondants Im et IM des courbes S et C_1 sont égaux puisqu'ils diffèrent une quantité moindre que mM qui est du second ordre;

on a également $In = IN$ et comme les arcs Im et In décrits par le point de contact, dans le temps Δt, sur les courbes S et S', sont égaux puisque ces courbes roulent l'une sur l'autre, il en est de même des arcs IM et IN. Donc tout se passe à l'époque t, au point de vue des vitesses, comme si dans le plan tangent en I à la sphère, C'_1 devait rouler sur C_1, d'où la relation (n° 54)

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{IO} \pm \frac{1}{IO'} = \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha} \pm \frac{1}{\operatorname{tang}\alpha'}.$$

Théoriquement on mettra le signe — dans la formule, sauf à regarder α' comme négatif quand les courbures seront opposées.

96. Pour démontrer par l'Analyse la formule qui précède, nous établirons d'abord une relation entre les trois angles et un côté d'un triangle sphérique ABC dont deux des angles B et C sont infiniment petits, le troisième angle A' étant par suite voisin de deux droits.

On a, en général

$$\cos A' = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

ou en appelant A l'angle supplémentaire de A', angle qui dans le cas actuel est infiniment petit,

$$\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a;$$

on en tire en développant

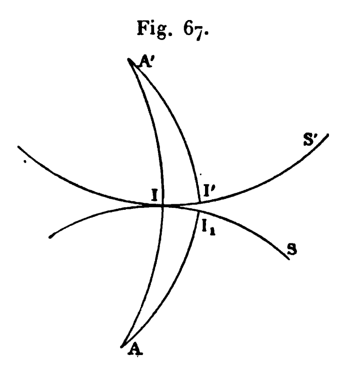
$$1 - \frac{A^2}{2} + \ldots = \left(1 - \frac{B^2}{2} + \ldots\right)\left(1 - \frac{C^2}{2} + \ldots\right) - \cos a\,(B - \ldots)(C - \ldots),$$

et enfin

$$A^2 = B^2 + C^2 + 2BC \cos a.$$

Soient maintenant, sur la sphère de rayon égal à l'unité, S la base, S' la roulante (*fig.* 67), I et I_1 les pôles instantanés aux époques t et $t + \Delta t$, I' le point de S' qui vient en I_1, A et A' les traces sur la sphère des droites polaires

Fig. 67.



de S et S' en I, ou *centres de courbure géodésique* de ces courbes ; on a

$$\text{arc}\, II' = \text{arc}\, II_1 = \Delta s.$$

Au bout du temps Δt, l'arc de grand cercle I'A' se place sur le prolongement de l'arc de grand cercle AI, en sorte que si ε est l'angle infiniment petit de ces deux arcs, on a

$$\omega = \lim \frac{\varepsilon}{\Delta t};$$

la formule précédemment établie donne d'ailleurs, si l'on désigne par $R = IA$, $R' = IA'$ les *rayons de courbure géodésique* des courbes S et S',

$$\varepsilon^2 = A^2 + A'^2 + 2AA'\cos(R + R'),$$

d'où

$$\left(\frac{\varepsilon}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\Delta s}{\Delta t}\right)^2 \left[\left(\frac{A}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{A'}{\Delta s}\right)^2 + 2\,\frac{A}{\Delta s}\,\frac{A'}{\Delta s}\cos(R + R')\right];$$

or, dans le triangle sphérique IAI_1, on a

$$\frac{\sin A}{\sin II_1} = \frac{\sin I_1}{\sin R},$$

d'où

$$\lim \frac{A}{\Delta s} = \frac{1}{\sin R},$$

et de même

$$\lim \frac{A'}{\Delta s} = \frac{1}{\sin R'};$$

donc

$$\begin{aligned} \omega^2 &= V^2 \left[\frac{1}{\sin^2 R} + \frac{1}{\sin^2 R'} + \frac{2}{\sin R \sin R'} \cos(R + R')\right] \\ &= V^2 \left[\frac{1}{\operatorname{tang}^2 R} + \frac{1}{\operatorname{tang}^2 R'} + \frac{2}{\operatorname{tang} R \operatorname{tang} R'}\right], \end{aligned}$$

et enfin

$$\omega = V\left(\frac{1}{\operatorname{tang} R} + \frac{1}{\operatorname{tang} R'}\right),$$

c'est la formule (27) dans le cas où les courbures sont opposées.

97. *Centre de courbure géodésique d'une roulette sphérique.* — Soient M (*fig.* 68) un point de la sphère appartenant à la figure mobile, r et θ ses coordonnées polaires sphériques et M' la position de M au temps $t + \Delta t$; les arcs de grands cercles MI et $M'I_1$ sont normaux à la roulette de M, ils se rencontrent donc au point O_1, qui tend vers le centre de courbure géodésique de M, et les coordonnées de ce point O_1 sont θ et $r_1 = -IO_1$. D'ailleurs l'angle ε de la rotation pendant le temps Δt est celui de l'arc MI' avec sa situation $M'I_1$ à l'époque $t + \Delta t$, et l'on a comme précédemment

$$\omega = \lim \frac{\varepsilon}{\Delta t}.$$

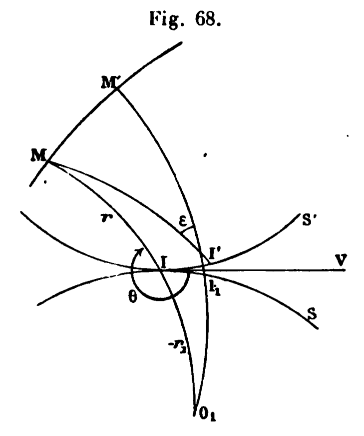
Or

$$\varepsilon^2 = M^2 + O_1^2 + 2M \times O_1 \cos(r - r_1).$$

d'où

$$\left(\frac{\varepsilon}{\Delta t}\right)^2 = \left(\frac{\Delta S}{\Delta t}\right)^2 \left[\left(\frac{M}{\Delta S}\right)^2 + \left(\frac{O_1}{\Delta S}\right)^2 + 2\frac{M}{\Delta S}\frac{O_1}{\Delta S}\cos(r - r_1)\right];$$

Fig. 68.



d'ailleurs le triangle sphérique MII_1 donne

$$\frac{\sin M}{\sin \Delta S} = \frac{\sin(2\pi - \theta)}{\sin MI'},$$

et à la limite

$$\lim \frac{M}{\Delta S} = -\frac{\sin\theta}{\sin r};$$

on aurait de même

$$\lim \frac{O_1}{\Delta S} = -\frac{\sin\theta}{\sin O_1 I} = \frac{\sin\theta}{\sin r_1},$$

donc

$$\omega^2 = V^2 \sin^2\theta \left[\frac{1}{\sin^2 r} + \frac{1}{\sin^2 r_1} - \frac{2\cos(r - r_1)}{\sin r \sin r_1}\right]$$
$$= V^2 \sin^2\theta \left[\frac{1}{\tan g^2 r} + \frac{1}{\tan g^2 r_1} - \frac{2}{\tan g\, r \tan g\, r_1}\right],$$

et enfin

$$\frac{\omega}{V} = \pm \sin \theta \left(\frac{1}{\tang r_1} - \frac{1}{\tang r} \right).$$

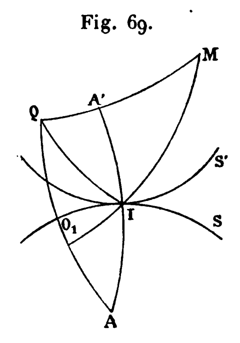
On lève aisément l'ambiguïté du signe en généralisant la formule pour une sphère de rayon ρ, qu'on fera ensuite égal à l'infini; la formule devant alors coïncider avec celle des roulettes planes, on a finalement

$$(28) \qquad \frac{1}{\tang R} - \frac{1}{\tang R'} = \sin \theta \left(\frac{1}{\tang r_1} - \frac{1}{\tang r} \right).$$

La même observation s'appliquerait à la formule (27).

98. La formule (28) nous montre que si l'on considère la roulette que décrirait le point μ perspective de M sur

Fig. 69.



le plan tangent en I à la sphère, si l'on faisait rouler le courbe C'_1 sur la courbe C_1 (*fig.* 66), cette roulette admettrait $\tang r_1$ pour rayon de courbure, c'est-à-dire que son rayon de courbure serait la perspective du rayon de courbure géodésique de M. Si donc on suppose construit par la méthode de Savary le rayon de courbure de la roulette plane que décrirait μ et qu'on fasse sur la sphère la perspective de cette figure, on arrivera à la

construction suivante du centre de courbure géodésique d'une roulette sphérique :

Soient A et A′ les centres de courbure géodésique des courbes sphériques S et S′ (*fig.* 69), on mènera les arcs de grands cercles MI et MA′, ce dernier par sa rencontre avec l'arc IQ normal à IM donnera le point Q, qui, joint sur la sphère au point A, fournira l'arc QA rencontrant l'arc MI au point O_1 centre de courbure de la roulette sphérique de M.

CHAPITRE IV.

MOUVEMENT LE PLUS GÉNÉRAL D'UN SYSTÈME INVARIABLE.

1. — Axe hélicoïdal.

99. Lemme I. — *On peut toujours amener un solide d'une position* S *à une autre position* S′ *par une translation suivie d'une rotation.*

Soient en effet A et A′ les deux positions d'un même point du corps; imprimons à S une translation égale et parallèle à AA′, S vient en S″ et pour passer de S″ à S′, on est dans le cas d'un corps ayant un point fixe A′. On voit donc qu'il suffira pour amener la coïncidence de S″ avec S′ de faire tourner le système autour d'un certain axe A′I passant par le point A′, ce qui démontre le lemme énoncé.

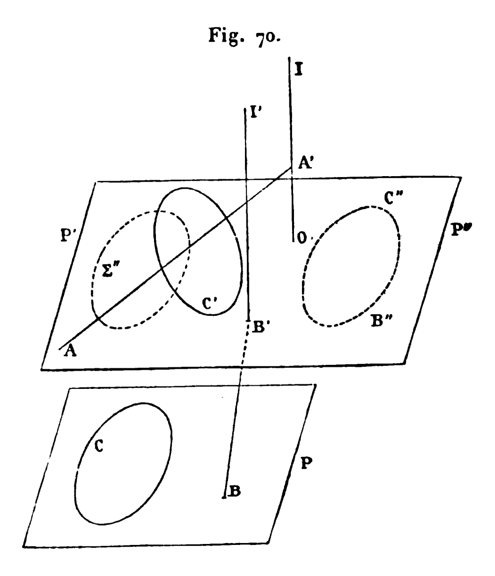
100. Le point A étant quelconque dans le système, on peut choisir entre une infinité de translations à chacune desquelles correspond une rotation; ce qu'il y a de remarquable c'est que : *la direction de l'axe de la rotation, ainsi que l'angle* α *de cette rotation sont indépendants du point choisi pour faire la translation.*

Pour le démontrer, prenons successivement, pour faire la translation, deux points A et B (*fig.* 70) et soient A′I, B′I′ les axes de rotation correspondants. Considérons dans

la première position du système un plan P mené par B perpendiculairement à $A'I$ et la section C qu'il donne dans le solide ou, plus généralement, une courbe de ce plan invariablement liée au système.

La première translation déplace le plan P parallèlement

Fig. 70.



à lui-même et l'amène en P'' et C en C'', puis par la rotation autour de $A'I$, P'' glissant sur lui-même prend sa position finale P' qui amène la courbe C'' en C' et le point B'' en B'. Passons maintenant au second mode de déplacement; dans la translation BB', le plan P vient se confondre avec le plan parallèle $P'P''$, puisqu'ils contiennent l'un et l'autre le point B', C prend la position Σ'' dans ce plan et pour amener Σ'' en C' il faut faire tourner le système autour d'un axe $B'I'$ perpendiculaire à $P'P''$, c'est-à-dire parallèle à $A'I$.

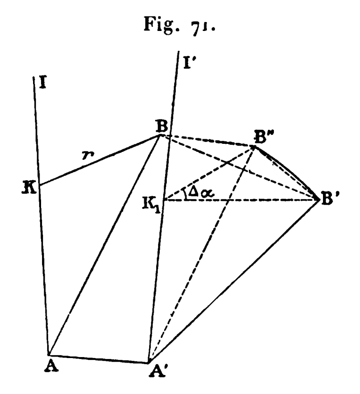
L'angle α de la rotation est également indépendant du

point A; si nous considérons, en effet, une droite D du plan P, la translation l'amène en D″ parallèle à D et la rotation en D′, et l'angle α de la rotation est l'angle des droites D′ et D″ ou encore des droites D′ et D; il est donc absolument indépendant de la translation, puisque c'est l'angle des positions initiale et finale de la droite D.

101. Lemme II. — *La vitesse d'un point quelconque* B *dans le déplacement réel d'un système invariable, est la somme géométrique de la vitesse d'un autre point* A *et de celle qu'aurait* B *tournant autour d'un axe issu de* A *avec une certaine vitesse angulaire* ω. *La direction et la grandeur de l'axe de rotation sont d'ailleurs indépendantes des points* A *et* B.

Soient A, B; A′ et B′ (*fig.* 71) les positions initiale et

Fig. 71.



finale des deux points considérés, aux époques t et $t + \Delta t$; on peut amener B en B′ par une translation BB″ égale et parallèle à AA′ suivie d'une rotation autour d'un axe convenable A′I′; la direction de cet axe ainsi que l'angle $\Delta\alpha$ de la rotation élémentaire étant d'ailleurs indépendants

des points A et B. Or le triangle BB″B′ donne

$$\left(\frac{BB'}{\Delta t}\right) \equiv \left(\frac{BB''}{\Delta t}\right) + \left(\frac{B''B'}{\Delta t}\right) \equiv \left(\frac{AA'}{\Delta t}\right) + \left(\frac{B''B'}{\Delta t}\right)$$

ou en remplaçant les cordes par les arcs de trajectoires, et passant à la limite,

$$(v_B) \equiv (v_A) + \lim\left(B'K_1 \times \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}\right).$$

Soient alors AI la position limite de A′I′ et r la distance KB du point B à la droite AI; on a, en posant $\omega = \lim \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$,

$$(v_B) \equiv (v_A) + (\omega r),$$

la quantité géométrique ωr étant normale au plan passant par le point B et l'axe AI. Donc la vitesse du point B est bien la somme géométrique de la vitesse du point A et de celle qu'aurait B tournant avec une certaine vitesse angulaire ω autour de la droite AI issue de A; cet axe AI dont la grandeur et la direction sont indépendantes du point A s'appelle *axe correspondant* à ce point.

102. Théorème. — *Dans le mouvement le plus général d'un solide, il y a à chaque instant une droite et une seule dont tous les points ont une vitesse commune de translation dirigée suivant cette droite. Les vitesses des autres points sont les sommes géométriques de deux autres dues l'une à un mouvement de translation égal et parallèle à celui de cette droite, l'autre à un mouvement de rotation autour de cette même ligne.*

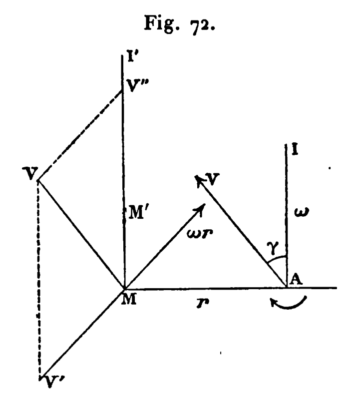
La droite dont il s'agit s'appelle *axe instantané de rotation et de glissement* ou encore *axe hélicoïdal.*

On énonce plus simplement ce théorème en disant :

Le mouvement le plus général d'un corps solide est un mouvement hélicoïdal.

Soient, en effet, A un point quelconque du système, $AI = \omega$ (*fig.* 72) l'axe correspondant, V la vitesse du point A, et γ l'angle de cette vitesse avec AI; sur la perpendi-

Fig. 72.



culaire AM au plan VAI prenons un point M, on aura, d'après le second lemme,

$$(v_M) \equiv (V) + (\omega r);$$

or, la composante V de v_M peut être regardée comme la somme géométrique de deux autres, l'une V'' suivant la parallèle MI' à AI et l'autre V' perpendiculaire au plan I'MA, et cette dernière placée suivant la même droite que ωr, sera dirigée en sens contraire si l'on a choisi convenablement le sens de AM. Si donc on prend la distance $AM = r$ telle que

$$\omega r = V',$$

les composantes V' et ωr se détruiront et l'on aura

$$v_M = V'' = V \cos\gamma;$$

le point M est donc animé de la vitesse V'' parallèle à AI, et il en sera évidemment de même de tous les points tels que M′ de la droite MI′ qui admettent pour leur vitesse les mêmes composantes que M. On démontre ainsi l'existence de l'axe hélicoïdal qui jouit encore de cette propriété d'être le *lieu des points de vitesse minimum* puisque V'' est la projection sur cette droite de la vitesse V d'un point quelconque A du système.

La seconde partie du théorème résulte du dernier lemme.

Enfin l'axe hélicoïdal est unique; en effet, la vitesse d'un point pris en dehors de cet axe étant la résultante de deux autres dont l'une est V'', tandis que l'autre est perpendiculaire à V'', est nécessairement différente en direction de la vitesse V''; d'ailleurs, pour que les points d'une droite autre que l'axe aient même vitesse de translation, il faudrait que tous les points de cette droite fussent à la même distance de l'axe, ou que cette droite fût parallèle à l'axe; mais alors la vitesse commune des points de cette droite aurait une direction différente de cette droite, puisque les points de l'axe ont seuls une vitesse parallèle à sa direction, il n'existe donc à chaque instant qu'un seul axe hélicoïdal.

103. Remarques. — I. La direction de l'axe hélicoïdal à un instant donné peut s'obtenir si l'on connaît les vitesses de trois points A, B, C du système, en remarquant que ces trois droites ont même projection sur l'axe; menant alors par un même point O trois droites égales et parallèles à ces trois vitesses, le plan passant par leurs extrémités sera normal à l'axe et la vitesse V'' sera la perpendiculaire abaissée de O sur ce plan. Enfin l'axe hélicoïdal étant connu en direction, si l'on mène l'axe AI

correspondant au point A et que l'on construise la composante normale au plan AIB de la vitesse V_1 du point B, le quotient de cette composante par la distance r de B à AI donnera ω; on pourra donc construire l'axe hélicoïdal.

II. Si la vitesse d'un point quelconque A était perpendiculaire à l'axe de rotation, on aurait $V'' = V\cos\gamma = 0$, l'axe hélicoïdal aurait une vitesse nulle et l'on serait, à l'instant considéré, dans le cas particulier du mouvement d'un solide autour d'un axe fixe.

III. A une époque donnée, tout se passe, au point de vue des vitesses, comme si le corps était animé d'un mouvement hélicoïdal, c'est-à-dire comme si tous ses points décrivaient des hélices de même pas, tracées sur des cylindres de révolution ayant pour axe l'axe instantané de rotation et de glissement.

Soient, en effet, dans un tel mouvement, Oz l'axe des cylindres et h le pas des hélices, les coordonnées d'un point sont

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = \frac{h}{2\pi}\theta,$$

d'où

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = r\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{h}{2\pi}\frac{d\theta}{dt};$$

posons

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega, \qquad \frac{h}{2\pi}\omega = V'',$$

les composantes de la vitesse deviennent

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \qquad \frac{dy}{dt} = \omega x, \qquad \frac{dz}{dt} = V'';$$

ce sont bien les formules qui donnent les projections de

la vitesse dans le mouvement du corps autour de Oz, axe instantané de rotation et de glissement.

104. *Déplacement d'un segment de droite.* — Au lieu d'avoir à chaque instant un axe hélicoïdal unique, on en a dans ce cas une infinité. Soient, en effet, AB (*fig.* 71) le segment de droite, $A'B'$ sa position infiniment voisine et $A'B''$ parallèle à AB; si par le milieu de la corde $B''B'$ on mène un plan qui lui soit normal, toute droite de ce plan passant par A' pourra être prise comme axe correspondant au point A, et à chacune de ces directions répondra un axe hélicoïdal. Parmi tous ces axes, il y en aura un normal à la vitesse de A qui sera par suite un axe simple de rotation. On pouvait arriver immédiatement à cette dernière conclusion, en remarquant que tous les points de AB se déplacent parallèlement au plan $BB''B'$ et que l'on est, par suite, dans le cas du déplacement d'un système invariable parallèlement à un plan, mais ce plan varie à chaque instant.

En résumé, le déplacement infiniment petit d'un segment de droite dans l'espace peut s'obtenir au moyen d'une rotation autour d'un certain axe, et l'on peut énoncer cette propriété due à Chasles :

Les plans normaux aux trajectoires de tous les points d'une droite se coupent suivant une même droite.

105. *Étude analytique du mouvement général d'un solide.*

Des formules de transformation

$$(1)\qquad \begin{cases} x = a + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z, \\ y = b + \beta X + \beta' Y + \beta'' Z, \\ z = c + \gamma X + \gamma' Y + \gamma'' Z, \end{cases}$$

on déduit les composantes de la vitesse

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} v_x &= \frac{da}{dt} + X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha'}{dt} + Z\frac{d\alpha''}{dt},\\ v_y &= \frac{db}{dt} + X\frac{d\beta}{dt} + Y\frac{d\beta'}{dt} + Z\frac{d\beta''}{dt},\\ v_z &= \frac{dc}{dt} + X\frac{d\gamma}{dt} + Y\frac{d\gamma'}{dt} + Z\frac{d\gamma''}{dt},\end{aligned}\right.$$

que l'on obtiendrait en fonction des coordonnées absolues du point en éliminant X, Y et Z; mais il est plus facile d'interpréter les composantes de la vitesse suivant les axes entraînés. On a

$$\begin{aligned} v_X &= \alpha v_x + \beta v_y + \gamma v_z\\ &= \alpha\frac{da}{dt} + \beta\frac{db}{dt} + \gamma\frac{dc}{dt} + X\Sigma\alpha\frac{d\alpha}{dt} + Y\Sigma\alpha\frac{d\alpha'}{dt} + Z\Sigma\alpha\frac{d\alpha''}{dt},\end{aligned}$$

Σ se rapportant aux lettres et non aux accents. Le coefficient de X est nul et, si nous posons comme précédemment

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} p &= \Sigma\alpha''\frac{d\alpha'}{dt} = -\Sigma\alpha'\frac{d\alpha''}{dt},\\ q &= \Sigma\alpha\frac{d\alpha''}{dt} = -\Sigma\alpha''\frac{d\alpha}{dt},\\ r &= \Sigma\alpha'\frac{d\alpha}{dt} = -\Sigma\alpha\frac{d\alpha'}{dt},\end{aligned}\right.$$

nous aurons, en appelant P, Q, R les composantes suivant les directions des axes entraînés de la vitesse de l'origine A de ces axes,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} v_X &= P + qZ - rY,\\ v_Y &= Q + rX - pZ,\\ v_Z &= R + pY - qX.\end{aligned}\right.$$

Ces formules montrent que la vitesse d'un point (X, Y, Z) du solide est la somme géométrique de la vitesse du point A et d'une vitesse de rotation autour d'un axe issu de ce

point; les composantes p, q, r de cette rotation ne dépendant pas de a, b, c, la grandeur et la direction de l'axe de rotation sont indépendantes du point A.

Cherchons les points dont la vitesse est parallèle à l'axe de rotation; posons à cet effet

$$\frac{v_X}{p} = \frac{v_Y}{q} = \frac{v_Z}{r},$$

nous aurons à l'aide des formules (4)

$$(5) \quad \frac{P + qZ - rY}{p} = \frac{Q + rX - pZ}{q} = \frac{R + pY - qX}{r},$$

ce sont les équations d'une droite et cette droite est parallèle à l'axe, car sa parallèle menée par l'origine contient manifestement le point

$$X = p, \qquad Y = q, \qquad Z = r;$$

on démontre ainsi l'existence d'un axe hélicoïdal unique.

2. — Représentation géométrique du mouvement.

Proposons-nous de rechercher les équations et les propriétés des deux surfaces réglées, l'une fixe, l'autre mobile, qui sont la première le lieu des axes hélicoïdaux dans l'espace, la seconde le lieu des droites du corps, qui doivent devenir successivement axes hélicoïdaux à des époques distinctes.

106. *Lieu des axes hélicoïdaux dans l'espace.* — L'axe hélicoïdal à l'époque t a pour équations, par rapport aux axes mobiles,

$$(5) \quad \frac{P + qZ - rY}{p} = \frac{Q + rX - pZ}{q} = \frac{R + pY - qX}{r} = \frac{\Sigma Pp}{\omega^2},$$

d'où

$$P + qZ - rY = \frac{1}{\omega^2}[P(p^2+q^2+r^2) - Pq^2 - Pr^2 + Qpq + Rpr],$$

$$qZ - rY = q\frac{Qp - Pq}{\omega^2} - r\frac{Pr - Rp}{\omega^2};$$

posons pour abréger

$$(6)\quad X_1 = \frac{Rq - Qr}{\omega^2}, \qquad Y_1 = \frac{Pr - Rp}{\omega^2}, \qquad Z_1 = \frac{Qp - Pq}{\omega^2},$$

les équations de l'axe deviennent

$$(5\ bis)\qquad \begin{cases} qZ - rY = qZ_1 - rY_1, \\ rX - pZ = rX_1 - pZ_1, \\ pY - qX = pY_1 - qX_1. \end{cases}$$

Ces équations qui, en réalité, se réduisent à deux, montrent que le point X_1, Y_1, Z_1 appartient à l'axe hélicoïdal ; d'ailleurs les cosinus directeurs de cette droite sont $\frac{p}{\omega}$, $\frac{q}{\omega}$ et $\frac{r}{\omega}$, on peut donc écrire comme suit les équations de l'axe hélicoïdal par rapport aux axes entraînés

$$X = X_1 + \rho\frac{p}{\omega},$$

$$Y = Y_1 + \rho\frac{q}{\omega},$$

$$Z = Z_1 + \rho\frac{r}{\omega},$$

ρ désignant la distance affectée d'un signe convenable, du point X_1, Y_1, Z_1 au point X, Y, Z de la droite ; on en tire

$$x = a + (\alpha X_1 + \alpha' Y_1 + \alpha'' Z_1) + \frac{\rho}{\omega}(\alpha p + \alpha' q + \alpha'' r),$$

les équations de l'axe hélicoïdal rapporté aux axes fixes

sont donc

$$(7)\quad \begin{cases} x = a + (\alpha X_1 + \alpha' Y_1 + \alpha'' Z_1) + \dfrac{\rho}{\omega} p_1, \\ y = b + (\beta X_1 + \beta' Y_1 + \beta'' Z_1) + \dfrac{\rho}{\omega} q_1, \\ z = c + (\gamma X_1 + \gamma' Y_1 + \gamma'' Z_1) + \dfrac{\rho}{\omega} r_1, \end{cases}$$

p_1, q_1 et r_1 étant les projections de la rotation ω sur les axes fixes; elles donnent x, y, z en fonction des variables t et ρ. Si l'on éliminait ces variables, on aurait l'équation de la surface fixe, mais il est préférable de regarder les équations (7) comme représentant la surface.

107. *Lieu des axes hélicoïdaux dans le corps.* — Nous chercherons l'équation de ce lieu rapporté aux axes fixes, le corps étant pris dans la position qu'il occupe à l'époque t_0. Nous avons obtenu les équations par rapport aux axes entraînés de la droite du solide qui devient axe hélicoïdal à l'époque t, on en déduit les équations de cette droite par rapport aux axes fixes, à l'époque t_0,

$$(8)\quad \begin{cases} (x) = a_0 + \alpha_0 X_1 + \alpha'_0 Y_1 + \alpha''_0 Z_1 + \dfrac{\rho}{\omega}(\alpha_0 p + \alpha'_0 q + \alpha''_0 r), \\ (y) = b_0 + \beta_0 X_1 + \beta'_0 Y_1 + \beta''_0 Z_1 + \dfrac{\rho}{\omega}(\beta_0 p + \beta'_0 q + \beta''_0 r), \\ (z) = c_0 + \gamma_0 X_1 + \gamma'_0 Y_1 + \gamma''_0 Z_1 + \dfrac{\rho}{\omega}(\gamma_0 p + \gamma'_0 q + \gamma''_0 r). \end{cases}$$

Ces équations qui donnent (x), (y) et (z) en fonction de t et ρ, représentent à l'époque t_0 la deuxième surface rapportée aux axes fixes.

Pour $t = t_0$ et pour une même valeur de ρ, on aura

$$x = (x), \qquad y = (y), \qquad z = (z);$$

les équations (7) et (8) représentent alors une même droite commune aux deux surfaces, c'est l'axe hélicoïdal à l'époque t_0.

108. *Les deux surfaces se raccordent en tous les points de leur génératrice commune.* — Le plan tangent à la surface (7) a pour équation, en représentant par X, Y, Z les coordonnées courantes

$$\begin{vmatrix} X-x & Y-y & Z-z \\ \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \rho} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{vmatrix} = 0.$$

Pour $t = t_0$, le point x, y, z étant supposé sur la génératrice commune, on aura d'après (7)

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \frac{p_1}{\omega} = \frac{\alpha_0 p_0 + \alpha'_0 q_0 + \alpha''_0 r_0}{\omega_0} = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right). \tag{9}$$

En outre $\frac{\partial x}{\partial t}$ ne diffère de $\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)$ que par des termes en

$$\frac{da}{dt}, \quad \frac{d\alpha}{dt}, \quad \ldots;$$

on aura donc, mais seulement pour $t = t_0$,

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + \frac{da}{dt} + X_1 \frac{d\alpha}{dt} + Y_1 \frac{d\alpha'}{dt} + Z_1 \frac{d\alpha''}{dt} + \frac{\rho}{\omega}\left(p\frac{d\alpha}{dt} + q\frac{d\alpha'}{dt} + r\frac{d\alpha''}{dt}\right);$$

ce dernier terme est nul à toute époque. De plus, si l'on appelle x_1 y_1 z_1 les coordonnées absolues du point X_1 Y_1 Z_1 de l'axe hélicoïdal supposé lié au corps, on a

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{da}{dt} + X_1 \frac{d\alpha}{dt} + Y_1 \frac{d\alpha'}{dt} + Z_1 \frac{d\alpha''}{dt};$$

d'ailleurs ce point étant sur l'axe hélicoïdal, sa vitesse V'' est dirigée suivant cet axe et a, par suite, pour cosinus directeurs relativement aux axes fixes $\frac{p_1}{\omega}, \frac{q_1}{\omega}, \frac{r_1}{\omega}$, on a donc

$$\frac{dx_1}{dt} = V'' \frac{p_1}{\omega} = \frac{V''}{\omega}(\alpha p + \alpha' q + \alpha'' r).$$

On en conclut, pour $t = t_0$,

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{V''_0}{\omega_0}(\alpha_0 p_0 + \alpha'_0 q_0 + \alpha''_0 r_0) = V''_0 \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right),$$

et enfin

$$(10) \qquad \frac{\partial x}{\partial t} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + V''_0 \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right).$$

L'équation du plan tangent à la surface (7) peut donc s'écrire

$$0 = \begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) + V''_0 \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) + V''_0 \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + V''_0 \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right) \end{vmatrix}$$

ou

$$\begin{vmatrix} X - x & Z - y & Z - z \\ \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right) \\ \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) & \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right) & \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) \end{vmatrix} = 0,$$

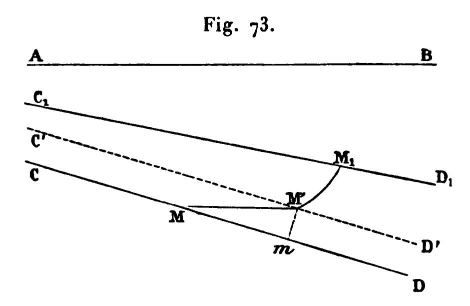
et cette dernière est l'équation du plan tangent à la surface (8) au point considéré. Donc les deux surfaces se raccordent en tous les points de leur génératrice commune.

On peut arriver directement à ce résultat, en se fondant sur les propriétés de l'axe hélicoïdal.

Soient, à l'époque t, AB la génératrice commune aux deux surfaces gauche G et G_1, l'une fixe, l'autre mobile, (*fig.* 73) C_1D_1 la génératrice infiniment voisine de G_1, qui doit venir, à l'époque $t + \Delta t$, coïncider avec la génératrice CD de la surface G.

Pour montrer que les deux surfaces ont un élément commun ABCD il suffit de prouver que les points de la

Fig. 73.



droite C_1D_1 sont des distances infiniment petites du second ordre de CD.

On peut faire coïncider C_1D_1 avec CD, à l'aide d'une rotation autour de AB qui amène C_1D_1 en C'D' et M_1 en M', suivie d'une translation parallèle à AB dans laquelle M' vient en M. Or M_1M' est du second ordre et il en est de même de la distance $M'm$ du point M' à CD, puisque la translation M'M, du premier ordre, fait un angle infiniment petit avec CD. Donc la droite M_1m est du second ordre et les surfaces G et G_1 se raccordent tout le long de AB.

109. *Deux courbes quelconques, lieux de points correspondants sur les deux surfaces, ne sont pas généralement tangentes.* — On appelle *points correspondants* sur les deux surfaces deux points qui, dans le mouvement,

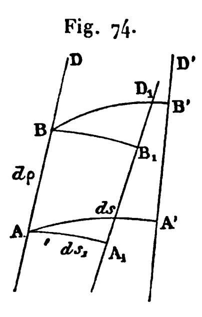
viennent à coïncider. Il suffit, pour obtenir deux courbes correspondantes sur les deux surfaces, d'établir une relation arbitraire entre ρ et t. Pour le point M_0 commun à ces courbes à l'époque t_0, on a, en vertu des équations (9) et (10),

$$dx = (dx) + V''_0 \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right) dt, \tag{11}$$

et deux autres analogues. Les cosinus directeurs des tangentes aux deux courbes ne sont donc pas les mêmes, en général, et il n'y a pas contact, ce qui exclut le roulement.

110. *Les aires entourées sur les deux surfaces par des courbes correspondantes sont égales.* — Il suffit, pour le prouver, de montrer que les éléments infinité-

Fig. 74.



simaux correspondants ont même surface. Nous prendrons pour élément d'aire sur la surface fixe l'aire comprise entre la génératrice commune D, la génératrice infiniment voisine D' (*fig.* 74) et deux courbes quelconques infiniment voisines AA', BB', soit AA_1BB_1 l'élément correspondant de la seconde surface. Ces éléments sont assimilables à des trapèzes de mêmes bases, il suffit donc de prouver que

$$ds \sin(d\rho,\ ds) = ds_1 \sin(d\rho,\ ds_1),$$

ou que

$$ds^2[1 - \cos^2(d\rho, ds)] = ds_1^2[1 - \cos^2(d\rho, ds_1)].$$

Or

$$\cos(d\rho, ds) = \frac{p_1\,dx + q_1\,dy + r_1\,dz}{\omega\,ds},$$

d'où

$$ds^2[1 - \cos^2(d\rho, ds)] = \frac{\omega^2\,ds^2 - (p_1\,dx + q_1\,dy + r_1\,dz)^2}{\omega^2}$$

$$= \frac{(p_1^2 + q_1^2 + r_1^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (p_1\,dx + q_1\,dy + r_1\,dz)^2}{\omega^2}$$

$$= \frac{\Sigma(p_1\,dy - q_1\,dx)^2}{\omega^2}.$$

Il faut prouver que cette expression ne change pas quand on passe de l'une à l'autre surface; or on a

$$dx = (dx) + V''_0\left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)dt = (dx) + V''_0\,\frac{p_1}{\omega}\,dt,$$

d'où

$$p_1\,dy - q_1\,dx = p_1\left[(dy) + V''_0\,\frac{q_1}{\omega}\,dt\right] - q_1\left[(dx) + V''_0\,\frac{p_1}{\omega}\,dt\right]$$
$$= p_1(dy) - q_1(dx) \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

111. *Vitesse de l'axe hélicoïdal.* — La vitesse V'' commune à tous les points de l'axe hélicoïdal est donnée par les formules (5)

$$\frac{v_X}{p} = \frac{v_Y}{q} = \frac{v_Z}{r} = \frac{\Sigma Pp}{\omega^2} = \frac{\sqrt{v_X^2 + v_Y^2 + v_Z^2}}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}} = \frac{V''}{\omega};$$

d'où

$$V'' = \frac{\Sigma Pp}{\omega}. \tag{12}$$

Si l'on a, à l'époque t, $\Sigma Pp = 0$, c'est-à-dire si la vitesse

du point A est perpendiculaire à l'axe de rotation, on a $V'' = 0$. Le mouvement à l'époque considérée est un mouvement simple de rotation et la formule (11) devient $dx = (dx)$. Il y a dans ce cas contact et roulement des courbes correspondantes, et si cela a lieu à toute époque, les deux surfaces réglées sont dites rouler l'une sur l'autre; ces surfaces ne sont pas des cônes, car il ne s'agit pas, du moins en général, du mouvement autour d'un point fixe.

3. — Accélération.

112. L'accélération d'un point quelconque M du système est la somme géométrique de celle d'un autre point A et de l'accélération du point M, dans son mouvement par rapport à des axes de direction constante, passant par le point A (n° 32). Or, pour évaluer l'accélération dans ce mouvement relatif, on est ramené au mouvement d'un solide autour d'un point fixe, on appliquera donc les formules (21) du Chapitre précédent, ce qui donne pour les composantes de l'accélération suivant les axes fixes

$$(13)\quad \begin{cases} \gamma_x = \dfrac{d^2a}{dt^2} + z\dfrac{dq_1}{dt} - y\dfrac{dr_1}{dt} + p_1\Sigma p_1 x - \omega^2 x, \\ \gamma_y = \dfrac{d^2b}{dt^2} + x\dfrac{dr_1}{dt} - z\dfrac{dp_1}{dt} + q_1\Sigma p_1 x - \omega^2 y, \\ \gamma_z = \dfrac{d^2c}{dt^2} + y\dfrac{dp_1}{dt} - x\dfrac{dq_1}{dt} + r_1\Sigma p_1 x - \omega^2 z. \end{cases}$$

113. Ces formules se simplifient avec un choix particulier d'axes coordonnés. Prenons pour axe des z l'axe hélicoïdal à l'époque t considérée et pour axe des y la perpendiculaire commune à cet axe et à l'axe hélicoïdal à

l'époque $t + \Delta t$; enfin prenons le point A à l'origine des coordonnées fixes. A l'époque t la vitesse de A est suivant l'axe des z; à l'époque $t + \Delta t$ elle est dans le plan des zx, car elle a une composante de translation parallèle au nouvel axe hélicoïdal et une composante de rotation perpendiculaire à l'axe des y, or ces deux composantes sont dans le plan des zx. Les vitesses du point A aux époques t et $t + \Delta t$ étant dans le plan des zx, il en est de même de son accélération et l'on a $\frac{d^2b}{dt^2} = 0$. On a encore

$$p_1 = q_1 = 0, \qquad r_1 = \omega;$$

enfin, si l'on mène par le point A une parallèle à l'axe hélicoïdal à l'époque $t + \Delta t$, on aura l'axe de la rotation instantanée, à cette même époque, dans le mouvement relatif du solide autour de A, donc l'accélération angulaire de ce mouvement est dans le plan des zx et $\frac{dq_1}{dt} = 0$. Les formules qui donnent les composantes de l'accélération deviennent alors, avec ce choix spécial d'axes coordonnés,

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} \gamma_x &= \frac{d^2a}{dt^2} - y\frac{dr_1}{dt} - \omega^2 x, \\ \gamma_y &= x\frac{dr_1}{dt} - z\frac{dp_1}{dt} - \omega^2 y, \\ \gamma_z &= \frac{d^2c}{dt^2} + y\frac{dp_1}{dt}. \end{aligned} \right.$$

4. — Foyers, plans focaux et droites conjuguées.

114. Considérons un solide animé d'un mouvement quelconque et proposons-nous de chercher le lieu des points de ce corps dont la vitesse est, à l'époque t, parallèle à une direction donnée. Soient l, m, n les cosinus directeurs de cette direction, par rapport aux axes

entraînés ; le lieu cherché satisfait aux équations

$$\frac{P + qZ - rY}{l} = \frac{Q + rX - pZ}{m} = \frac{R + pY - qX}{n} = \frac{\Sigma Pp}{\Sigma lp}.$$

Écartant les hypothèses

$$\Sigma Pp = 0 \quad \text{et} \quad \Sigma lp = 0$$

qui exprimeraient, la première qu'il y a rotation simple, la seconde que la direction considérée est normale à l'axe hélicoïdal, on trouve deux équations distinctes du premier degré ; le lieu cherché est donc une droite, elle est d'ailleurs parallèle à l'axe hélicoïdal, car la parallèle à la droite trouvée menée par l'origine des axes mobiles contient le point de coordonnées $X = p$, $Y = q$, $Z = r$. Ce résultat était aisé à prévoir, car tous les points d'une droite parallèle à l'axe hélicoïdal ont évidemment leurs vitesses égales et parallèles.

115. Théorème I. — *Dans un plan pris dans le corps solide, il y a, à l'époque t, un point et un seul dont la vitesse est perpendiculaire à ce plan.*

En effet, si l'on cherche à l'époque t tous les points dont la vitesse est parallèle à la normale au plan, on trouve une droite parallèle à l'axe hélicoïdal ; cette droite coupe en général le plan en un point qui est le point cherché.

Ce point s'appelle *pôle* ou *foyer du plan*, et le plan se nomme *plan focal* ou *plan polaire* du point.

L'équation du plan focal d'un point x, y, z est donc

$$(15) \qquad v_x(X - x) + v_y(Y - y) + v_z(Z - z) = 0.$$

Si l'on a pris l'axe hélicoïdal pour axe des z, cette équation devient

$$-\omega y(X - x) + \omega x(Y - y) + V''(Z - z) = 0,$$

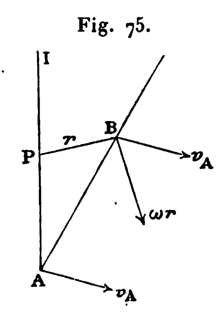
ou

$$(15\,bis)\qquad xY - yX + \frac{V''}{\omega}(Z - z) = 0.$$

116. Théorème II. — *Lorsqu'une droite* AB *est normale à la vitesse de l'un de ses points* A, *elle est normale à la vitesse de tout autre point* B *de cette droite.*

Soient, en effet, AI l'axe correspondant au point A

Fig. 75.



(*fig.* 75) et BP la perpendiculaire abaissée du point B sur cet axe, on a

$$(v_B) \equiv (v_A) + (\omega \times BP).$$

Or la vitesse de rotation $\omega \times BP$ est perpendiculaire au plan BAI et par suite à la droite AB; v_A transportée parallèlement à elle-même au point B est, par hypothèse, perpendiculaire à AB, donc il en est de même de la vitesse du point B, somme géométrique de ces deux vitesses.

117. Théorème III. — *Le lieu de toutes les droites passant par un point* F, *et normales à la vitesse de tous leurs points, est le plan focal de ce point.*

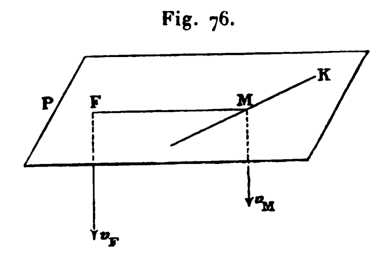
Toutes ces droites doivent en effet être normales à la

vitesse du point F, elles sont donc dans un même plan normal à cette vitesse.

118. Théorème IV. — *Si une droite située dans un plan est normale à la vitesse d'un de ses points, elle passe nécessairement par le foyer du plan.*

Soit MK (*fig.* 76) une droite située dans le plan P; si elle ne passait pas par le foyer F de ce plan, v_M serait per-

Fig. 76.



pendiculaire à MK par hypothèse et à FM, d'après le théorème III; elle serait donc perpendiculaire au plan et ce plan admettrait deux foyers F et M.

119. Théorème V. — *Quand la droite d'intersection de deux plans passe par le pôle de l'un d'eux, elle contient aussi le pôle de l'autre.*

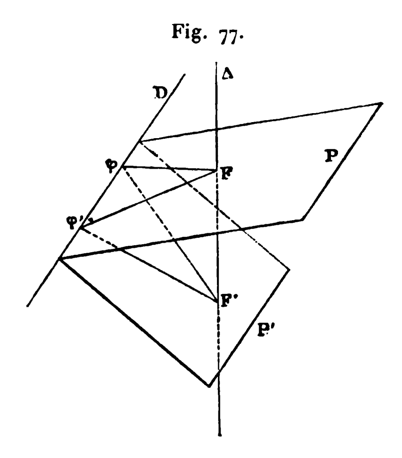
Soient, en effet, $\alpha\beta$ la droite d'intersection de deux plans P et Π et F le point de cette droite pôle du plan P; cette droite étant normale à la vitesse d'un de ses points F et se trouvant contenue dans le plan Π passe par le pôle φ de ce plan.

120. Théorème VI. — *Le lieu des foyers des plans passant par une droite* D *est une autre droite* Δ; *réci-*

proquement les plans passant par Δ *ont leurs foyers sur la droite* D.

Soient P et P′ (*fig.* 77) deux plans passant par la droite D, F et F′ leurs foyers, et Δ la droite qui joint ces deux points, nous établirons d'abord la réciproque. Tout

Fig. 77.



plan tel que FF′φ passant par Δ, aura son foyer en φ sur la droite D; en effet, ce plan passant par le foyer F de P aura son foyer sur la droite Fφ intersection de ces plans; ce foyer devant se trouver pour la même raison sur la droite F′φ sera en φ.

Considérons maintenant un plan quelconque passant par D, ce plan contenant les foyers φ et φ' de chacun des plans FφF′, Fφ'F′, son foyer sera dans chacun de ces plans, donc sur leur intersection Δ. C.Q.F.D.

Les droites D et Δ, qui sont telles que chacune d'elles est le lieu des foyers des plans passant par l'autre, sont dites *conjuguées*.

Remarque. — Quand des droites ont un point commun

M, leurs conjuguées sont dans le plan polaire de ce point. Soit, en effet, Δ la droite conjuguée de D passant par M, le plan passant par Δ et M aura son foyer sur la droite D, donc au point M.

121. Théorème VII. — *Toute droite qui rencontre deux droites conjuguées est normale à la vitesse de tous ses points.*

Soient, en effet, D et Δ deux droites conjuguées et $\alpha\beta$ une droite qui les rencontre respectivement en α et β, le plan $\Delta\beta\alpha$ a son foyer en α, donc la droite $\beta\alpha$ est normale à la vitesse de α et par suite de tout autre point de cette droite.

Réciproquement, une droite $\alpha\beta$ normale à la vitesse de ses points et qui rencontre une droite D doit rencontrer sa conjuguée Δ. Car la droite $\alpha\beta$ normale à la vitesse de ses points étant le plan $D\alpha\beta$ doit passer par le foyer de ce plan, qui est d'ailleurs sur Δ, donc elle rencontre Δ.

122. Problème. — *Une droite étant donnée, trouver sa conjuguée.*

Prenons pour axe Oz l'axe instantané du mouvement hélicoïdal à l'époque considérée, et pour axe des x la plus courte distance AB de l'axe hélicoïdal et de la droite D dont on cherche la conjuguée (*fig.* 78). Soient $AB = a$ et φ l'angle de la droite D avec Oz; les équations de cette droite sont

$$x = a, \qquad y = z \operatorname{tang}\varphi.$$

L'équation du plan focal d'un point M de cette droite sera

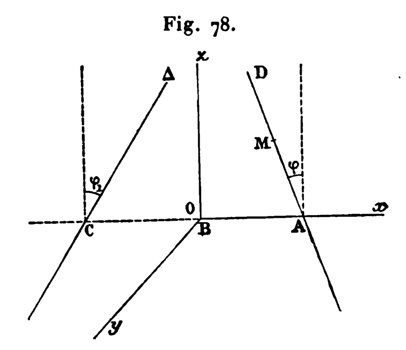
$$aY - zX \operatorname{tang}\varphi + \frac{V''}{\omega}(Z - z) = 0;$$

ce plan passe par la droite Δ quel que soit le point M considéré sur D, c'est-à-dire quel que soit z ; écrivant que son équation est indépendante de z, on a les équations de la droite Δ

$$\omega a \mathrm{Y} + \mathrm{V}''\mathrm{Z} = 0, \qquad \omega \mathrm{X} \operatorname{tang}\varphi + \mathrm{V}'' = 0.$$

Ces équations montrent que la droite Δ coupe l'axe des

Fig. 78.



x et lui est perpendiculaire ; on a

$$(16) \qquad \mathrm{BC} = -\frac{\mathrm{V}''}{\omega \operatorname{tang}\varphi}, \qquad \operatorname{tang}\varphi_1 = -\frac{\mathrm{V}''}{\omega a},$$

φ_1 étant l'angle de Δ avec Oz.

On voit que si la droite D est parallèle à l'axe hélicoïdal, la droite Δ est rejetée à l'infini.

De ce qui précède résulte encore le théorème suivant.

123. Théorème VIII. — *La perpendiculaire commune à deux droites conjuguées quelconques rencontre l'axe hélicoïdal et le coupe à angle droit.*

124. Théorème IX. — *Une droite normale à la vitesse de tous ses points est conjuguée d'elle-même.*

Cette droite passe, en effet, par le pôle de tout plan qui la contient, elle est donc le lieu des pôles de ces plans, c'est-à-dire sa propre conjuguée.

En vertu du théorème VII, toute droite rencontrant deux droites conjuguées est conjuguée d'elle-même.

125. Théorème X. — *Deux couples quelconques de droites conjuguées sont sur un même hyperboloïde.*

Soient D et Δ, D′ et Δ' deux couples de droites conjuguées, par les trois premières droites faisons passer un hyperboloïde et considérons une génératrice $\alpha\beta$ du second système de cet hyperboloïde; elle sera normale à la vitesse de tous ses points puisqu'elle rencontre D et Δ, et comme elle rencontre D′ elle coupera aussi sa conjuguée Δ'. Or $\alpha\beta$ est une génératrice quelconque du second système de la surface, donc Δ' étant rencontré par toutes les génératrices du second système est une génératrice de l'hyperboloïde.

Si D′ est parallèle à l'axe hélicoïdal, Δ' est rejeté à l'infini et la surface est un paraboloïde hyperbolique.

126. Problème. — *Trouver le point central et le paramètre de distribution d'une génératrice d'une surface gauche.*

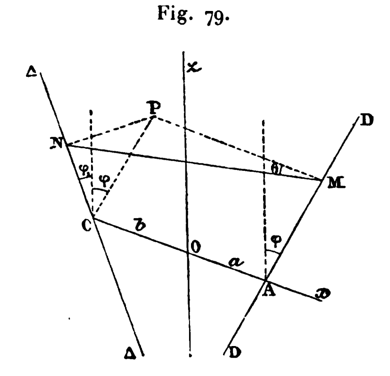
Une surface gauche quelconque peut être regardée comme engendrée par une droite, dans son mouvement le plus général. Supposons ce mouvement connu et proposons-nous d'abord de trouver le plan tangent ou la normale, en un point M d'une génératrice D (*fig* 79). Cette normale est perpendiculaire à la trajectoire de M, donc, puisqu'elle rencontre D, elle doit rencontrer sa conjuguée Δ; elle est d'ailleurs perpendiculaire à la génératrice D de

la surface, la normale cherchée MN s'obtiendra donc en menant par le point M un plan normal à D et joignant le point N où il coupe Δ au point donné M.

On voit que les normales à la surface le long d'une génératrice D engendrent un paraboloïde, car elles sont normales à D et par suite parallèles à un plan fixe et elles s'appuient sur deux droites fixes D et Δ.

Cela posé, soient Oz l'axe hélicoïdal et AOC la perpen-

Fig. 79.



diculaire commune aux droites D, Δ et Oz, ce sera aussi la normale à la surface en A; proposons-nous de trouver son angle θ avec MN. Menons MP parallèle à AC et CP parallèle à D, la droite NP située dans le plan NMP normal à D est normale à CP; elle l'est aussi à MP, car cette droite MP parallèle à AC est par suite normale à D et Δ ou au plan NCP. Les deux triangles NPM et NPC, rectangles en P, nous donnent

$$\text{NP} = \text{PM} \times \operatorname{tang}\theta, \qquad \text{NP} = \text{PC} \times \operatorname{tang}(\varphi + \varphi_1)$$

d'où

$$(a + b) \operatorname{tang}\theta = \text{AM} \times \operatorname{tang}(\varphi + \varphi_1),$$

et

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\text{AM}}{\dfrac{a+b}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi_1)}}.$$

Or, en général, si A est le point central d'une génératrice AM d'une surface réglée et θ l'angle des plans tangents, ou, ce qui revient au même, des normales en M et A, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\text{AM}}{k},$$

donc, ici, A est le point central et

$$k = \frac{a+b}{\operatorname{tang}(\varphi+\varphi_1)},$$

le paramètre de distribution.

127. *Déplacement d'un corps solide assujetti à certaines conditions.* — Pour déterminer complètement la position d'un corps solide dans l'espace, il faut six conditions; en effet, trois points déterminent la position d'un corps solide, or leurs neuf coordonnées sont liées par trois relations qui expriment que les distances de ces trois points sont constantes, il reste donc six paramètres arbitraires.

Si le corps n'est plus soumis qu'à cinq conditions, tous ses points vont décrire des courbes; introduisons, en effet, la condition que le z d'un point M_0 du corps soit donné et égal à z_0, les coordonnées x, y, z d'un autre point quelconque M du corps seront déterminées et connues en fonction de z_0,

$$x = \varphi(z_0), \qquad y = \psi(z_0), \qquad z = \chi(z_0);$$

si donc on considère z_0 comme un paramètre variable, le

point M se déplacera sur une certaine courbe et il en sera de même de tous les autres points du corps solide.

Supposons qu'on se donne seulement quatre conditions, ajoutons-y les deux données y_0 z_0, nous aurons alors les six conditions nécessaires pour déterminer la position du corps solide et les coordonnées de M seront des fonctions connues de y_0 et z_0,

$$x = \varphi(y_0, z_0), \qquad y = \psi(y_0, z_0), \qquad z = \chi(y_0, z_0);$$

ces équations signifient que le point M est assujetti à rester sur une certaine surface. Ce sont ces surfaces qu'on appelle *surfaces trajectoires* des différents points du corps.

128. Théorème XI. — *Quand un corps solide est assujetti à quatre conditions, il y a deux droites* D *et* Δ *qui restent conjuguées dans tous les mouvements instantanés qu'il peut prendre.*

Quatre droites étant données, il en existe généralement deux autres qui les rencontrent. Si, en effet, par les trois premières on fait passer un hyperboloïde, cette surface sera rencontrée par la quatrième droite en deux points par chacun desquels passe une génératrice du second système; ces deux génératrices rencontrent les quatre droites données. Il y aurait toutefois une infinité de solutions, si les quatre droites étaient sur un même hyperboloïde.

Cela posé, considérons quatre points quelconques M, N, P, Q d'un corps solide, ils auront chacun une surface trajectoire S_1, S_2, S_3, S_4; en ces points menons les normales aux surfaces trajectoires, il y aura généralement deux droites D et Δ rencontrant ces quatre normales. Pour tout déplacement du corps compatible avec les liaisons, les normales considérées seront normales aux trajectoires

des quatre points M, N, P, Q, la conjuguée de la droite D sera donc rencontrée par les quatre normales (théorème VII), elle ne pourra être par suite que la droite Δ.

129. Théorème XII. — *Parmi tous les déplacements possibles d'un corps solide assujetti à quatre conditions, il y en aura deux qui se réduiront à de simples rotations instantanées.*

Nous verrons, en effet, dans le Chapitre suivant, que le mouvement le plus général d'un solide peut se décomposer en deux rotations instantanées autour de deux droites conjuguées D et Δ; dans le cas actuel, les deux paramètres arbitraires qui achèvent de définir le mouvement seront les vitesses de rotation; or on peut, en particulier, faire nulle l'une d'entre elles et le mouvement se réduit alors à une rotation instantanée autour de l'autre.

130. Théorème XIII. — *La normale à la surface trajectoire d'un point quelconque rencontre les droites* D *et* Δ.

En effet, le plan normal à la trajectoire d'un point A dans une rotation instantanée autour de D passera par cette droite et, comme il contient également la normale à la surface trajectoire de A, cette normale rencontrera la droite D; pour la même raison, elle rencontrera la droite Δ.

131. Théorème XIV. — *Dans tous les mouvements possibles d'un corps assujetti à quatre liaisons, il n'y a qu'un groupe de deux droites restant constamment conjuguées.*

Si, en effet, deux droites D et Δ restent conjuguées dans

tout mouvement compatible avec les liaisons, elles sont rencontrées par les normales aux surfaces trajectoires de tous les points et en particulier par les normales aux surfaces S_1, S_2, S_3 et S_4; or ces normales ne sont pas en général sur un même hyperboloïde, puisque se donner quatre conditions revient à se donner arbitrairement ces quatre surfaces; donc, puisqu'il n'y a que deux droites rencontrant ces quatre normales, il n'y a aussi que deux droites restant conjuguées d'elles-mêmes dans tout mouvement compatible avec les liaisons.

Remarque. — L'existence des droites conjuguées D et Δ est subordonnée à cette condition que la normale à la surface S_4 rencontre l'hyperboloïde défini par les normales aux trois surfaces S_1, S_2 et S_3.

132. Application. — *Mouvement d'un corps solide dont un point décrit une surface donnée, tandis qu'un plan lié au corps reste tangent à une autre surface, le point de contact restant fixe dans le plan.*

La première condition est simple et la seconde triple, soit en tout quatre conditions; donnons-nous comme cinquième condition que le point de contact M du plan P avec la surface S décrive une ligne de courbure de la surface.

Soient R le rayon de courbure de cette ligne, l, m, n les cosinus directeurs de la normale à la surface, x, y, z les coordonnées du point M et ρ la distance de ce point à un point fixe quelconque P de la normale, on a pour les coordonnées du point P

$$x_1 = x + \rho l, \qquad y_1 = y + \rho m, \qquad z_1 = z + \rho n,$$

d'où

$$dx_1 = dx + \rho\, dl, \qquad dy_1 = dy + \rho\, dm, \qquad dz_1 = dr + \rho\, dn;$$

mais la formule de Rodrigues donne

$$\frac{dx}{dl} = \frac{dy}{dm} = \frac{dz}{dn} = \mathrm{R},$$

on a donc

$$dx_1 = (\mathrm{R} + \rho)\,dl, \qquad dy_1 = (\mathrm{R} + \rho)\,dm,$$
$$dz_1 = (\mathrm{R} + \rho)\,dn;$$

or, si le point P est au centre de courbure principale, $\rho = -\mathrm{R}$ et l'on a

$$dx_1 = 0, \qquad dy_1 = 0, \qquad dz_1 = 0.$$

La vitesse du centre de courbure est nulle et le mouvement se réduit à une rotation instantanée autour d'une droite D passant par ce point; cette droite devant d'ailleurs être normale à la trajectoire du point M sera dans le plan de la seconde section normale principale.

Les droites conjuguées D et Δ vont donc passer par les centres de courbures principaux et sont dans les plans des sections normales principales.

5. — Des complexes linéaires.

133. On appelle *complexe* un ensemble de droites assujetties à une condition unique. Prenons la droite sous sa forme la plus simple,

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

et donnons-nous une relation entre ses quatre paramètres,

$$\varphi(a, b, p, q) = 0,$$

nous aurons particularisé les droites de l'espace; ce sont les droites satisfaisant à cette condition qu'on dit former un complexe.

Par chaque point x_0, y_0, z_0 de l'espace passent une infinité de droites appartenant au complexe ; leur lieu forme un cône dont on obtient l'équation en remplaçant dans

$$\varphi(a, b, x_0 - az_0, y_0 - bz_0) = 0$$

les quantités a et b par $\frac{x - x_0}{z - z_0}$ et $\frac{y - y_0}{z - z_0}$.

Le complexe est dit *linéaire* quand la relation donnée est linéaire par rapport à a, b, p, q et $aq - bp$, et qu'elle est par conséquent de la forme

$$(17) \quad La + Mb + Pp + Qq + R(aq - bp) + S = 0.$$

134. Théorème XV. — *Un complexe linéaire est l'ensemble des droites conjuguées d'elles-mêmes, par rapport à un mouvement convenablement choisi.*

Pour le démontrer, nous chercherons la relation entre les quantités a, b, p, q pour les droites conjuguées d'elles-mêmes dans un mouvement quelconque, et nous verrons si nous pouvons identifier la relation ainsi obtenue avec celle qui définit le complexe linéaire. Nous définirons l'axe hélicoïdal du mouvement par ses cosinus directeurs α, β, γ et un point x_0, y_0, z_0 ; soient en outre, ω la vitesse de rotation et V la vitesse de translation le long de cet axe, les composantes de la vitesse d'un point quelconque seront

$$\begin{aligned} v_x &= V\alpha + \omega[\beta(z - z_0) - \gamma(y - y_0)], \\ v_y &= V\beta + \omega[\gamma(x - x_0) - \alpha(z - z_0)], \\ v_z &= V\gamma + \omega[\alpha(y - y_0) - \beta(x - x_0)]; \end{aligned}$$

Pour exprimer que la droite

$$x = az + p, \qquad y = bz + q,$$

est normale à la trajectoire de l'un de ses points $x = p$,

$y = q$, $z = 0$, nous écrirons la relation

$$av_x + bv_y + v_z = 0 :$$

or

$$v_x = V\alpha + \omega(-\gamma q + \gamma y_0 - \beta z_0),$$
$$v_y = V\beta + \omega(\gamma p + \alpha z_0 - \gamma x_0),$$
$$v_z = V\gamma + \omega(\alpha q - \beta p + \beta x_0 - \alpha y_0);$$

d'où la relation cherchée

$$(18)\quad V(a\alpha + b\beta + \gamma) + \omega[\alpha q - \beta p + \gamma(bp - aq)] + \omega[a(\gamma y_0 - \beta z_0) + b(\alpha z_0 - \gamma x_0) + \beta x_0 - \alpha y_0] = 0;$$

elle est bien de même forme que celle qui définit un complexe linéaire. Pour montrer qu'elle est aussi générale, identifions les coefficients de p, q et $aq - bp$, nous aurons

$$\omega\beta = -P, \qquad \omega\alpha = Q, \qquad \omega\gamma = -R,$$

ces trois équations déterminent déjà la direction α, β, γ de l'axe hélicoïdal et la vitesse angulaire ω de la rotation; nous avons en outre

$$V\alpha + \omega(\gamma y_0 - \beta z_0) = L, \qquad V\beta + \omega(\alpha z_0 - \gamma x_0) = M,$$
$$V\gamma + \omega(\beta x_0 - \alpha y_0) = S,$$

d'où

$$V = L\alpha + M\beta + S\gamma;$$

une des trois relations précédentes peut alors être supprimée et les deux autres donnent les équations de l'axe hélicoïdal.

135. Théorème XVI. — *Si une courbe est telle que ses tangentes appartiennent à un complexe linéaire, le plan osculateur de la courbe en un point quelconque est le plan focal de ce point.*

Cette proposition est due à M. Appell.

Prenons pour axe des z l'axe du complexe, l'équation de ce complexe prendra la forme simple

$$aq - bp = \frac{V}{\omega} = k; \tag{19}$$

cherchons alors la condition pour qu'une courbe ait ses tangentes satisfaisant à cette équation. Les équations de la tangente sont

$$\frac{X - x}{dx} = \frac{Y - y}{dy} = \frac{Z - z}{dz}$$

ou

$$X = \frac{dx}{dz} Z + x - z \frac{dx}{dz},$$

$$Y = \frac{dy}{dz} Z + y - z \frac{dy}{dz};$$

on doit donc avoir

$$\frac{dx}{dz}\left(y - z \frac{dy}{dz}\right) - \frac{dy}{dz}\left(x - z \frac{dx}{dz}\right) = k,$$

et la relation différentielle qui exprime que toutes les tangentes à la courbe appartiennent au complexe est

$$y\,dx - x\,dy = k\,dz; \tag{20}$$

d'où

$$y\,d^2x - x\,d^2y = k\,d^2z.$$

Éliminant, à l'aide de ces relations, dz et d^2z dans l'équation du plan osculateur, on trouve

$$(X - x)y(dy\,d^2x - dx\,d^2y) + (Y - y)x(dx\,d^2y - dy\,d^2x) \\ + (Z - z)k(dx\,d^2y - dy\,d^2x) = 0$$

ou

$$xY - yX + k(Z - z) = 0;$$

c'est l'équation du plan polaire du point x, y, z de la courbe.

136. Théorème XVII. — *Si d'un point* A *de l'espace on mène les plans osculateurs à une courbe jouissant de la propriété d'avoir toutes ses tangentes appartenant à un complexe linéaire, les points de contact seront dans le plan polaire du point* A.

Soit, en effet, M l'un des points de contact; la droite AM, étant dans le plan polaire de M et passant par le pôle M de ce plan, est normale à la vitesse de tous ses points; donc toutes les droites telles que AM sont dans le plan polaire du point A.

Réciproquement, si l'on mène le plan polaire de A, les plans osculateurs des points tels que M où il coupe la courbe passent par le point A, car la droite AM étant normale à la vitesse du point A est normale à la vitesse de M, elle est donc dans le plan polaire de ce point.

Parmi toutes les courbes satisfaisant à la condition précitée, étudiées par Chasles, se trouve la cubique gauche, on a alors ce théorème :

Par un point quelconque A *de l'espace, on peut mener à une cubique gauche trois plans osculateurs, et les trois points de contact sont situés dans un plan qui passe par le point* A.

137. *Propriétés des surfaces réglées dont toutes les génératrices font partie d'un complexe linéaire.* — Le plan tangent en un point M d'une génératrice AB a son pôle en M′ sur la même droite et réciproquement le plan polaire d'un point M′ contient la génératrice AB et est tangent en un seul point M de cette génératrice. Le sys-

tème des points M et M′ forme donc une division homographique

$$Axx' + Bx + Cx' + D = 0;$$

le plan tangent coïncidera avec le plan polaire aux points pour lesquels $x = x'$ et il y aura, sur chaque génératrice, deux points jouissant de cette propriété. Il en résulte que le lieu de ces points forme sur la surface une ligne à deux branches.

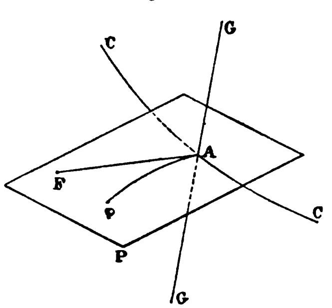
138. *Les tangentes à la courbe, lieu des points pour lesquels le plan tangent et le plan polaire coïncident, font partie d'un complexe linéaire.* — En effet, la tangente en A à cette courbe étant située dans le plan tangent en A est dans le plan polaire de ce même point, elle est donc conjuguée d'elle-même. Ces tangentes font partie du complexe auquel appartiennent les génératrices de la surface.

139. *Cette courbe est une ligne asymptotique de la surface,* car, les tangentes à cette courbe appartenant au complexe, le plan osculateur de la courbe en A est le plan polaire de ce point, c'est-à-dire le plan tangent à la surface; la courbe, jouissant de cette propriété que tous ses plans osculateurs sont tangents à la surface, est une ligne asymptotique.

140. *Le degré de cette courbe* C *est égal à la classe d'une section plane quelconque de la surface.* — Pour le démontrer, coupons la surface par un plan P de foyer F (*fig.* 80) et soit φ la courbe d'intersection; le point A, pôle du plan tangent T, étant sur l'intersection des deux plans, il en est de même du point F; la droite AF est donc

tangente en A à la courbe φ. Réciproquement, si du foyer F d'un plan P on mène une tangente à la courbe φ d'intersection de ce plan avec la surface, le point de contact A sera sur la courbe C; car, si G est la génératrice de la surface passant en A, GAF sera le plan tangent en ce point, or il contient les deux droites FA et AG conjuguées

Fig. 80.



d'elles-mêmes, donc le point A sera le pôle du plan tangent et appartiendra, par suite, à la courbe C. De cette remarque, on conclut qu'il y a autant de points de rencontre du plan P avec la courbe que l'on pourra mener de F de tangentes à la section plane φ, ce qui démontre le théorème.

141. *Surfaces réglées ayant deux directrices rectilignes.* — Les génératrices de ces surfaces font partie d'une infinité de complexes linéaires. Soient, en effet, G une génératrice quelconque, A et B les points où elle rencontre les directrices D et Δ, considérons le mouvement résultant des deux rotations ω et ω' autour de ces droites; la vitesse du point B n'aura qu'une composante provenant de la rotation ω, elle sera donc perpendiculaire au plan passant par ce point et la droite D, c'est-à-dire à

la génératrice G. Toutes les génératrices rectilignes de la surface sont des droites conjuguées d'elles-mêmes dans le mouvement ainsi défini, or ce mouvement dépend du rapport $\frac{\omega}{\omega'}$, on en conclut que les génératrices de la surface font partie d'une infinité de complexes linéaires; à chacun de ces complexes correspond une ligne asymptotique C, et l'on pourra obtenir toutes les lignes asymptotiques de la surface en faisant varier le paramètre arbitraire $\frac{\omega}{\omega'}$. Ce qui précède s'applique aux conoïdes, car on peut considérer un conoïde comme ayant une seconde directrice rectiligne Δ située à l'infini dans le plan directeur; on en conclut que *les lignes asymptotiques d'un conoïde sont telles que leurs tangentes appartiennent à un complexe linéaire.*

142. *Surfaces réglées du troisième ordre.* — Elles jouissent de la propriété d'avoir deux directrices rectilignes; car si l'on considère quatre génératrices et les deux droites D et Δ qui les rencontrent, ces dernières droites ayant chacune quatre points communs avec la surface y sont contenues tout entières. Le degré des lignes asymptotiques est égal à la classe d'une section plane de la surface, or une section plane quelconque est une courbe du troisième ordre, il semble donc que sa classe soit égale à six, mais il est facile de reconnaître que cette courbe a un point double et, par suite, que sa classe doit être abaissée de deux unités. Considérons, en effet, une section plane passant par une génératrice, la section se composera de la génératrice et d'une conique en chaque point de laquelle passe une génératrice de la surface, or, la conique étant une courbe unicursale, toutes les génératrices de la sur-

face seront déterminées individuellement et la surface sera unicursale; il en sera de même d'une section plane quelconque, donc toutes ces sections étant des courbes unicursales du troisième ordre auront un point double. En résumé, les lignes asymptotiques d'une surface réglée du troisième ordre sont des courbes gauches du quatrième ordre.

CHAPITRE V.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS.

1. — Composition des vitesses.

143. Un corps solide S peut être animé d'un certain mouvement par rapport à un système invariable S′, qui est lui-même en mouvement relativement à un troisième système fixe S″; on dit alors que le corps S est animé de deux mouvements simultanés. Composer ces mouvements, c'est, par définition, trouver le mouvement absolu du système S; on définirait de la même manière la composition d'un nombre quelconque de mouvements.

Il y a lieu de distinguer deux questions, celle des vitesses et celle des accélérations.

Nous avons vu que la vitesse absolue est la somme géométrique de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement, donc, au point de vue des vitesses, l'ordre dans lequel se présentent les mouvements composants est indifférent.

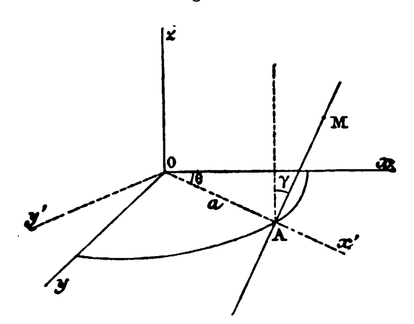
Le problème de la composition des vitesses permet parfois de trouver les tangentes à certaines courbes gauches définies géométriquement, et par suite les équations de ces courbes.

144. Application. — *Trouver les trajectoires ortho-*

gonales des génératrices rectilignes d'un hyperboloïde de révolution.

Nous prendrons pour axe des z, l'axe de l'hyperboloïde et le plan du cercle de gorge pour plan des xy; soient a le rayon du cercle de gorge, γ l'angle des génératrices avec l'axe, θ l'angle xO A (*fig.* 81) et ρ la distance AM.

Fig. 81.



Supposons que la génératrice AM tourne d'un mouvement uniforme autour de Oz, avec une vitesse angulaire ω, et qu'en même temps, le point M décrive la génératrice, de telle sorte que son mouvement absolu ait lieu sur la trajectoire orthogonale cherchée, alors la projection de la vitesse absolue du point M sur la génératrice sera nulle. Cherchons donc les projections sur AM des deux vitesses composantes; celle de la vitesse relative est cette vitesse relative elle-même $\frac{d\rho}{dt}$.

Pour avoir la projection de la vitesse d'entraînement, nous prendrons OA pour nouvel axe des x, les composantes de cette vitesse sont alors $-\omega y'$ suivant Ox' et $\omega x' = \omega a$ suivant Oy'; la première est perpendiculaire sur AM; quant à la seconde, sa projection sur la géné-

ratrice est

$$\omega a \cos\left(\frac{\pi}{2}+\gamma\right) = -\omega a \sin\gamma.$$

On a donc l'équation

$$\frac{d\rho}{dt} - \omega a \sin\gamma = c,$$

d'où

$$\rho = \omega a t \sin\gamma + c$$

ou, en éliminant le temps à l'aide de la relation $\theta = \omega t$,

$$\rho = a\theta \sin\gamma + c;$$

c'est l'équation des trajectoires orthogonales cherchées.

145. *Composition de deux translations.* — Le mouvement résultant est une translation dont la vitesse est égale à la somme géométrique des vitesses des deux mouvements composants.

146. *Composition de deux rotations autour d'axes concourants.* — Soient $OA = \omega$, $OA' = \omega'$ les axes des deux rotations composantes (*fig.* 82). Le mouvement résultant doit être une rotation autour d'un axe issu du point O, puisque le point O est fixe dans les deux mouvements. Cherchons donc un second point M dont la vitesse absolue soit nulle; il ne peut être que dans le plan AOA', autrement les deux vitesses composantes ne seraient pas suivant la même ligne et ne pourraient pas se détruire; en outre, il faut que le point M se trouve dans l'angle AOA' pour que les vitesses composantes puissent être opposées l'une à l'autre. De plus on doit avoir

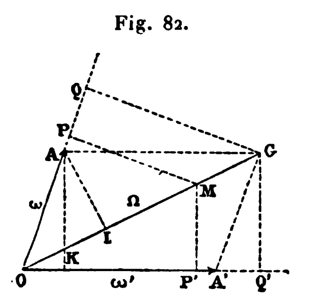
$$\omega \times MP = \omega' \times MP',$$

MP et MP′ étant les distances du point M aux droites OA et OA′; mais, dans le plan, le lieu des points tels que l'on ait

$$\frac{MP}{MP'} = \frac{\omega'}{\omega} = \text{const.}$$

est une droite issue du point O; cette droite est donc l'axe de la rotation résultante. Il est aisé de voir que cette

Fig. 82.



droite est la diagonale du parallélogramme construit sur OA et OA′, ou que l'on a bien

$$\omega \times GQ = \omega' \times GQ';$$

les deux membres représentent, en effet, l'aire du parallélogramme OAGA′.

L'axe résultant est donc dirigé suivant la diagonale du parallélogramme construit sur les axes composants; de plus, il a pour grandeur la longueur même de cette diagonale. Pour le démontrer, évaluons la vitesse du point A

$$v_A = \Omega \times AI,$$

AI étant la distance du point A à l'axe OG et Ω désignant la vitesse angulaire inconnue de la rotation résultante; d'autre part, les vitesses composantes du point A sont l'une égale à zéro et l'autre à $\omega' \times AK$; on doit donc

avoir

$$\Omega \times AI = \omega' \times AK = \text{aire } OAGA' = 2 \text{ aires } OAG = OG \times AI,$$

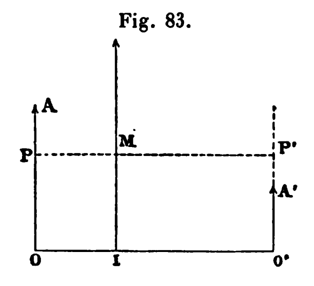
d'où l'on conclut

$$\Omega = OG. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Le mouvement résultant d'un nombre quelconque de rotations concourantes est une rotation autour d'un axe égal à la somme géométrique des axes des rotations composantes.

147. *Composition de deux rotations autour d'axes parallèles et de même sens.* — Soient ces deux axes $OA = \omega$, $O'A' = \omega'$ mesurés à partir de leur perpendiculaire commune OO' (*fig.* 83). La vitesse résultante pour

Fig. 83.



un point quelconque est évidemment parallèle au plan perpendiculaire aux deux axes, par suite les vitesses de tous les points du système sont parallèles à un plan; on en conclut que le mouvement résultant est un mouvement de rotation autour d'un axe parallèle aux axes considérés. Cet axe est le lieu des points de vitesse nulle, or ces points sont dans le plan des deux axes, et si M est l'un d'eux, on doit avoir

$$\omega \times MP = \omega' \times MP', \qquad \frac{MP}{MP'} = \frac{\omega'}{\omega};$$

l'axe de la rotation résultante est parallèle à ceux des rotations données et divise leur distance dans le rapport inverse des vitesses angulaires. Enfin la grandeur Ω de l'axe de la rotation résultante est égale à la somme des rotations composantes ; en effet, la vitesse du point O' a pour composantes $\omega \times OO'$ et zéro, d'où

$$\Omega \times IO' = \omega \times OO' ;$$

on aurait de même

$$\Omega \times IO = \omega \times OO',$$

d'où, en ajoutant,

$$\Omega = \omega + \omega'.$$

148. *Composition de deux rotations autour d'axes parallèles et de sens contraires.* — On verrait, comme précédemment, que le mouvement résultant est une rotation autour d'un axe parallèle aux deux autres, dans le sens du plus grand et égal à leur différence ; cet axe coupe le perpendiculaire OO' aux deux premiers en un point I situé sur le prolongement de cette droite, et tel que ses distances aux axes composants soient inversement proportionnelles aux grandeurs de ces axes.

149. *Couple de rotation.* — On donne le nom de couple de rotation à l'ensemble de deux rotations égales parallèles et de sens contraires. Si l'on cherche à composer ces rotations par la règle précédemment indiquée, on trouve que l'axe de la rotation résultante est nul et rejeté à l'infini, car de

$$\frac{IO}{IO'} = \frac{\omega'}{\omega}$$

on tire

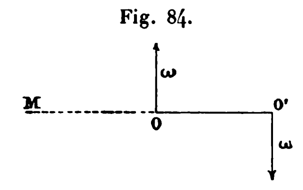
$$\frac{OO'}{IO'} = \frac{\omega' - \omega}{\omega} = 0, \qquad IO' = \infty.$$

Mais on peut reconnaître directement qu'un couple de rotation équivaut à une translation perpendiculaire au plan des deux axes; la vitesse v d'un point quelconque M de ce plan a pour expression (*fig.* 84)

$$v = \omega \times O'M - \omega \times OM = \omega \times OO' = \text{const.},$$

donc le plan et par suite tout le système est animé d'un mouvement de translation normal au plan des deux axes. Cette vitesse de translation ne dépend que de la direction

Fig. 84.



du plan des deux axes et du produit $\omega \times OO'$ que l'on nomme *moment du couple;* elle est donc indépendante de l'orientation de la droite OO' dans le plan des deux axes, toutefois son *sens* change si l'on change le sens de ces axes relativement à leur normale OO'; un couple de rotation est donc défini par trois éléments : la direction de son plan, son moment et son sens.

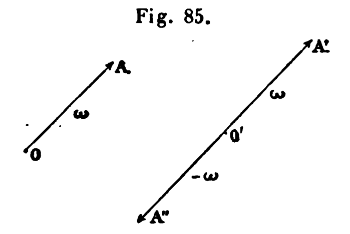
On peut inversement remplacer une vitesse de translation V par un couple de rotation, pourvu que l'on prenne le plan des deux axes perpendiculaire à cette vitesse, et que le moment du couple soit égal à V, en tenant compte de son sens.

150. Théorème. — *Une rotation peut toujours être*

remplacée par une autre égale, parallèle et de même sens, et une translation perpendiculaire au plan des deux axes de rotation.

Soit $OA = \omega$ un axe de rotation (*fig.* 85); introdui-

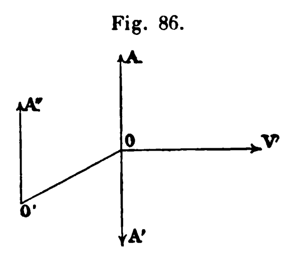
Fig. 85.



sons, en un point quelconque O', deux axes de rotation O'A', O'A'' de sens contraires et égaux l'un et l'autre à ω, rien n'est changé au point de vue des vitesses. Le couple OA, O'A'' peut être remplacé par une translation; on aura ainsi une rotation O'A' égale et parallèle à la première et une translation perpendiculaire au plan de OA et de O'.

Inversement, on peut remplacer une rotation OA et

Fig. 86.



une translation V (*fig.* 86) par une rotation unique, quand V est perpendiculaire à OA.

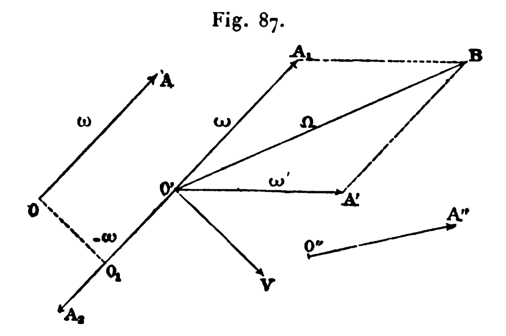
En effet, on peut d'abord remplacer V par un couple de rotation de sens convenable, situé dans un plan perpendiculaire à V et passant par OA. Orientons le couple et

modifions, au besoin, ses composantes, de telle sorte que sans changer son moment, l'une des rotations dont il se compose devienne égale et directement opposée à OA; alors, les deux rotations OA, OA′ se détruisant, il restera la rotation unique OA″. Il suffit, pour réaliser ces conditions, de transporter l'axe OA parallèlement à lui-même dans le plan perpendiculaire à V et dans un sens convenable, d'une quantité OO′ donnée par la relation

$$OO' = \frac{V}{\omega}.$$

151. — ***Composition de deux rotations autour d'axes quelconques.*** — La vitesse du mouvement résultant est alors celle d'un mouvement hélicoïdal. Soient, en effet,

Fig. 87.



$OA = \omega$, $O'A' = \omega'$ (*fig.* 87) les deux axes donnés; au point O′ appliquons deux rotations $O'A_1 = \omega$, $O'A_2 = -\omega$, OA et $O'A_2$ forment un couple équivalent à une translation perpendiculaire au plan OAO′ et telle que l'on ait $V = \omega \times OO_1$; restent deux rotations concourantes O′A′ et $O'A_1$ qui se composent en une rotation unique Ω.

D'ailleurs la translation V n'est pas perpendiculaire à Ω; car l'étant à ω, elle le serait au plan $O'A'A_1$, or elle l'est

déjà au plan OAO', ces deux plans se confondraient donc et les deux rotations seraient dans un même plan, ce qui est contre l'hypothèse.

La translation n'étant pas perpendiculaire à la rotation, on ne peut avoir de rotation unique, donc le mouvement résultant est hélicoïdal.

Corollaire. — N rotations autour d'axes quelconques se réduisent à une translation et à une rotation unique. Il suffit, en effet, de faire en O', pour toute autre rotation $O''A''$, ce que l'on a fait pour la rotation OA. On aura ensuite à composer des rotations et des translations concourantes, ce qui donnera en fin de compte une translation et une rotation.

152. Théorème. — *Le mouvement général d'un corps solide peut se ramener à deux rotations autour de droites conjuguées.*

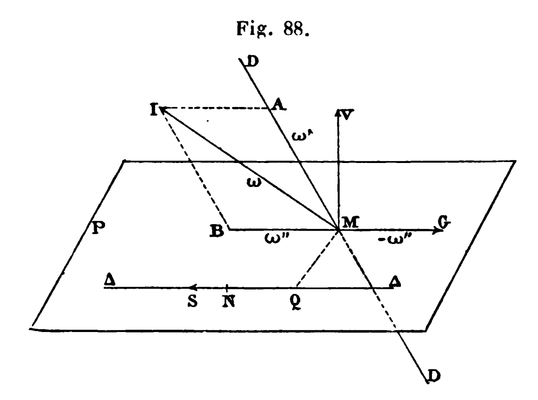
L'un des deux axes pouvant être choisi arbitrairement, excepté parmi les parallèles à l'axe hélicoïdal et les droites conjuguées d'elles-mêmes, il y a par suite une infinité de manières de décomposer en deux rotations le mouvement le plus général d'un solide.

Soient, en effet, D une droite quelconque dont on veut faire le premier axe de rotation, M l'un de ses points, V sa vitesse, P le plan focal de M et $MI = \omega$ l'axe instantané correspondant au point M (*fig.* 88); décomposons la rotation ω en deux autres, l'une $MA = \omega'$ suivant MD, l'autre $MB = \omega''$ suivant la trace du plan IMD sur le plan P. Cette décomposition est possible car MD n'est confondue ni avec MB, sans quoi la droite D normale à la vitesse de l'un de ses points M, serait conjuguée d'elle-même, ni avec l'axe instantané MI, autrement cette droite aurait la

direction des axes instantanés, ce qui est encore contraire à l'hypothèse; enfin MI n'est pas non plus confondue avec MB puisqu'alors l'axe instantané étant perpendiculaire à la vitesse V, on n'aurait plus un mouvement hélicoïdal véritable, mais une simple rotation autour d'un axe.

Cela posé, remplaçons V par le couple MG, QS situé

Fig. 88.



dans le plan P, en prenant $MG = QS = \omega''$ et MQ en avant du plan AMB, alors MG détruit MB et il reste en définitive les deux rotations

$$MA = \omega', \qquad QS = \omega'',$$

dont ω est la somme géométrique.

La droite QS ou Δ est conjuguée de D, car la vitesse d'un point quelconque de Δ n'a d'autre composante que sa vitesse de rotation autour de D; la vitesse de N est donc normale au plan mené par N et D, donc le point N est le foyer de ce plan et la droite Δ le lieu des foyers des plans passant par la droite D.

Remarques. — I. Le théorème s'applique encore au cas où la droite donnée D est parallèle à l'axe hélicoïdal, elle se

confond alors avec l'axe correspondant MI de l'un de ses points M et la rotation ω a lieu autour de la droite D; d'ailleurs la conjuguée Δ est rejetée à l'infini dans le plan polaire P, or on peut précisément regarder la translation V comme une rotation autour d'une droite située à l'infini et qui lui est normale.

II. Un mouvement étant défini par les rotations ω et ω' autour de deux droites D et Δ qui sont nécessairement conjuguées, on peut construire directement l'axe hélicoïdal de ce mouvement. Cet axe Ω est la somme géométrique des rotations ω et ω', on connaît donc sa grandeur, sa direction et les angles φ et φ_1 qu'il fait avec les droites D et Δ; il suffit, pour achever de le déterminer, de trouver la vitesse de translation V'' et le point O où l'axe hélicoïdal coupe la plus courte distance AC des droites D et Δ. Or on a (n° 122)

$$AC = \frac{V''}{\Omega}\left(\frac{1}{\tang\varphi} - \frac{1}{\tang\varphi_1}\right),$$

formule qui donne V''; la distance OA est ensuite déterminée par la formule

$$OA = a = -\frac{V''}{\Omega \tang\varphi_1}.$$

III. Le déplacement de la droite D peut être obtenu par une simple rotation autour de sa conjuguée Δ, en sorte que les plans normaux aux trajectoires des divers points de D passent par Δ. De là résulte la construction indiquée par Chasles pour l'axe hélicoïdal, lorsqu'on connaît la direction des vitesses de trois points A, B, C : on mène en A, B, C les plans normaux aux vitesses de ces points; les deux premiers se coupent suivant $\alpha\beta$, les deux derniers suivant $\beta\gamma$; AB et $\alpha\beta$, BC et $\beta\gamma$ forment deux systèmes de droites conjuguées. Menons donc la perpen-

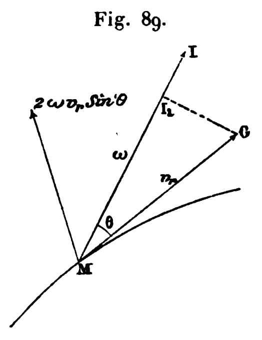
diculaire commune à AB et $\alpha\beta$, puis celle de BC et $\beta\gamma$; l'axe hélicoïdal doit rencontrer ces deux perpendiculaires à angle droit; il est donc leur plus courte distance.

2. — Composition des accélérations.

153. Théorème de Coriolis. — *Soient :*

γ *l'accélération absolue d'un point* M (*fig.* 89);
γ_r *son accélération relative;*

Fig. 89.



γ_e *son accélération d'entraînement ou accélération du point coïncident;*
v_r *la vitesse relative du point* M;
θ *l'angle de* v_r *avec l'axe instantané correspondant au point* M, *dans le mouvement d'entraînement;*
MI $= \omega$ *l'axe instantané dont il s'agit.*

On a

$$(\gamma) \equiv (\gamma_r) + (\gamma_e) + (2\omega v_r \sin\theta)$$

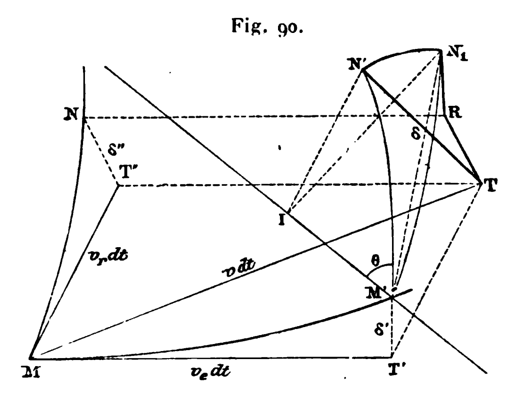
cette dernière grandeur devant être portée à partir de M, *perpendiculairement à la vitesse relative et à l'axe instantané, dans le sens où la rotation autour de l'axe*

instantané ferait tourner l'extrémité de la vitesse relative.

L'accélération complémentaire $2\omega v_r \sin\theta$ a reçu le nom d'*accélération centripète composée;* on voit encore qu'elle est égale au double de la vitesse de l'extrémité G de la vitesse relative, tournant autour de MI.

154. *Démonstration géométrique.* — Soient M la position du mobile au temps t (*fig.* 90), MN sa trajectoire

Fig. 90.



relative, MM' celle du point coïncident, N et M' les positions de ces points sur leurs trajectoires au temps $t + dt$, v, v_e et v_r les vitesses absolue, d'entraînement et relative; si l'on prend sur ces deux dernières droites des longueurs

$$MT' = v_e\,dt, \qquad MT'' = v_r\,dt,$$

les droites $T'M' = \delta'$ et $T''N = \delta''$ représenteront respectivement les déviations des mouvements d'entraînement et relatif. La diagonale MT du parallélogramme construit sur MT' et MT'' sera $v\,dt$, et, pour avoir la déviation absolue, il suffira de joindre le point T à la position N' du mobile au temps $t + dt$.

Pour arriver à connaître la position absolue N′ de M au temps $t + dt$, on peut remarquer que le mouvement élémentaire d'entraînement de la trajectoire relative MN du point M résulte de deux autres : un mouvement de translation qui amènerait MN en $M'N_1$ et un mouvement de rotation autour d'un certain axe M′I qui se confond, à la limite, avec l'axe instantané du mouvement d'entraînement correspondant au point M. Or il est facile de suivre le point N entraîné ainsi avec le système auquel il est lié. En effet, la translation MM′ peut être opérée au moyen de deux translations MT′, T′M′; par suite de la première, MT″ vient en T″T et le point N en R obtenu en menant TR égal et parallèle à δ''; la seconde amène le point R en N_1, la droite RN_1 étant égale et parallèle à δ', et N_1 est la position de N après la translation MM′. Effectuons maintenant la rotation autour de M′I; le point N_1 décrira un arc de cercle de rayon N_1I perpendiculaire au plan $IM'N_1$. N′ étant la position du mobile au temps $t + dt$, TN′ est la déviation absolue cherchée.

Cela posé, la ligne TN′ est la résultante de $TR = \delta''$, déviation relative, de $RN_1 = \delta'$, déviation d'entraînement, et de la corde N_1N'; cherchons la grandeur de l'arc N_1N' :

$$N_1 N' = \omega\, dt \times IN_1 = \omega\, dt \times v_r\, dt \sin\theta = \omega\, v_r \sin\theta \times dt^2;$$

on en conclut que l'accélération absolue est la résultante de l'accélération relative, de l'accélération d'entraînement et de l'accélération centripète composée $2\omega\, v_r \sin\theta$. Quant à la direction de cette dernière, elle est perpendiculaire au plan mené par la direction limite de M′I, qui est celle de l'axe instantané, et par celle de $M'N_1$ ou de la vitesse relative v_r; enfin son sens est celui que la rotation d'entraînement tend à imprimer au point N_1, or, à la limite, la droite $M'N_1$ vient coïncider avec la direction v_r.

155. *Démonstration analytique.* — Des formules de transformation

$$x = a + \alpha X + \alpha' Y + \alpha'' Z,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

on déduit les composantes de la vitesse

$$\frac{dx}{dt} = \left(\frac{da}{dt} + X\frac{d\alpha}{dt} + Y\frac{d\alpha'}{dt} + Z\frac{d\alpha''}{dt}\right) + \left(\alpha\frac{dX}{dt} + \alpha'\frac{dY}{dt} + \alpha''\frac{dZ}{dt}\right);$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et celles de l'accélération suivant les axes fixes

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \left(\frac{d^2a}{dt^2} + X\frac{d^2\alpha}{dt^2} + Y\frac{d^2\alpha'}{dt^2} + Z\frac{d^2\alpha''}{dt^2}\right)$$
$$+ \left(\alpha\frac{d^2X}{dt^2} + \alpha'\frac{d^2Y}{dt^2} + \alpha''\frac{d^2Z}{dt^2}\right) + 2\left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt}\frac{dY}{dt} + \frac{d\alpha''}{dt}\frac{dZ}{dt}\right)$$

et deux autres analogues.

La première parenthèse est la valeur que prendrait $\frac{d^2x}{dt^2}$ si l'on y considérait X, Y et Z comme des constantes, ou la composante suivant Ox de l'accélération d'entraînement γ_e.

La seconde parenthèse représente évidemment la projection sur Ox de l'accélération relative γ_r.

Pour évaluer la troisième parenthèse, menons par le point A, origine des axes entraînés, une droite AB (*fig.* 91) égale en grandeur, direction et sens à la vitesse relative v_r du point M; elle aura pour projections sur les axes mobiles

$$\frac{dX}{dt}, \quad \frac{dY}{dt}, \quad \frac{dZ}{dt},$$

et ces quantités représentent également les coordonnées relatives du point B; les coordonnées absolues de ce point

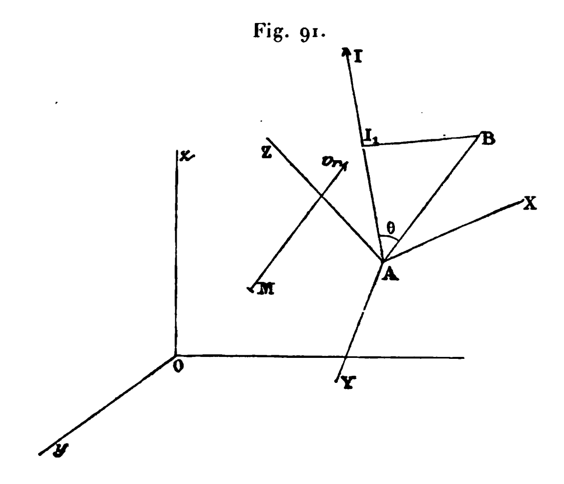
sont donc

$$x_1 = a + \alpha \frac{dX}{dt} + \alpha' \frac{dY}{dt} + \alpha'' \frac{dZ}{dt},$$

. . . .

Supposons maintenant le point B lié au système mobile

Fig. 91.



et entraîné avec lui, sa vitesse aura pour projection sur Ox

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{da}{dt} + \left(\frac{d\alpha}{dt}\frac{dX}{dt} + \frac{d\alpha'}{dt}\frac{dY}{dt} + \frac{d\alpha''}{dt}\frac{dZ}{dt}\right).$$

Le premier terme étant la projection de la vitesse de l'origine A, les autres qu'il s'agissait d'interpréter représentent nécessairement la projection de la vitesse du point B, dans sa rotation d'entraînement autour de l'axe instantané AI; or cette vitesse

$$\omega \times BI_1 = \omega \times AB \times \sin\theta = \omega v_r \sin\theta,$$

la troisième parenthèse de $\frac{d^2x}{dt^2}$ est donc égale à deux fois

la projection de la quantité géométrique $\omega v_r \sin\theta$, dont la direction et le sens ont été définis précédemment, et l'on a

$$(\gamma) \equiv (\gamma_e) + (\gamma_r) + (2\omega v_r \sin\theta). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Corollaires. — I. Les projections de l'accélération de Coriolis sur les axes entraînés sont celles du double de la vitesse du point B, dans la rotation instantanée; elles ont donc respectivement pour valeurs

$$2\left(q\frac{dZ}{dt} - r\frac{dY}{dt}\right), \quad 2\left(r\frac{dX}{dt} - p\frac{dZ}{dt}\right), \quad 2\left(p\frac{dY}{dt} - q\frac{dX}{dt}\right).$$

On peut d'ailleurs arriver directement à ce résultat et obtenir ainsi l'interprétation des troisièmes termes des composantes de l'accélération absolue.

II. On tire du théorème précédent

$$(\gamma_r) \equiv (\gamma) - (\gamma_e) - (2\omega v_r \sin\theta),$$

formule importante quand on étudie le mouvement relatif.

Le terme $-2\omega v_r \sin\theta$ représente l'accélération dite *centrifuge composée,* c'est l'accélération de Coriolis prise en sens contraire.

Remarque. — L'accélération de Coriolis est nulle et les accélérations se composent alors comme les vitesses, dans chacun des trois cas suivants :

1° $\omega = 0$, le mouvement d'entraînement se réduit à une translation;

2° $v_r = 0$, le point est à l'instant considéré en équilibre relatif, c'est-à-dire en repos par rapport au système entraîné;

3° $\theta = 0$, la vitesse relative est parallèle à l'axe instantané du mouvement d'entraînement.

156. Application. — *Considérons une droite tournant*

dans un plan autour d'un de ses points O, *et un point* M *mobile sur la droite, proposons-nous de trouver l'accélération absolue de ce point, en prenant pour mouvement d'entraînement celui de la droite.*

Si nous désignons par r et θ les coordonnées du point mobile, nous aurons d'abord

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \qquad \gamma_r = \frac{d^2r}{dt^2}.$$

Le point coïncident de M décrivant un cercle, l'accélération d'entraînement a pour composantes $-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ suivant le rayon OM, et $r\frac{d^2\theta}{dt^2}$ suivant sa perpendiculaire MT. Enfin l'accélération de Coriolis normale à l'axe de rotation et au rayon vecteur est dirigée suivant MT et a pour valeur

$$2\omega v_r = 2\frac{d\theta}{dt}\frac{dr}{dt}.$$

Les composantes de l'accélération absolue sont donc

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

suivant le rayon vecteur,

$$r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$$

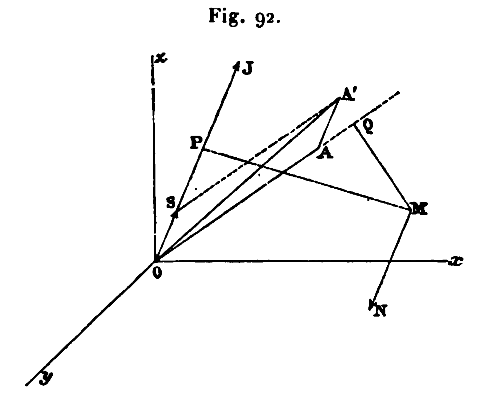
suivant sa perpendiculaire.

Nous retrouvons ainsi des expressions déjà calculées directement (n° 21).

157. Théorème de Rivals. — Considérons un solide S, mobile autour d'un point fixe O, et soient p, q, r les

composantes de sa rotation instantanée OA (*fig.* 92) au temps t. Proposons-nous d'établir les composantes de l'accélération de l'un des points M de ce solide, en étudiant son mouvement relativement à un autre solide S'

Fig. 92.



animé d'un mouvement de rotation uniforme ayant également pour projections p, q et r.

A l'instant considéré, les deux rotations étant les mêmes, la vitesse relative est nulle et l'on a seulement

$$(\gamma) \equiv (\gamma_e) + (\gamma_r).$$

Le mouvement d'entraînement étant un mouvement uniforme de rotation, l'accélération γ_e est centripète; elle est dirigée suivant la normale MQ à l'axe OA et égale à $\mathrm{MQ} \times \overline{\mathrm{OA}}^2$.

Pour avoir l'accélération relative γ_r, remarquons qu'au temps $t + dt$, les composantes de la rotation instantanée OA' sont

$$p + \frac{dp}{dt}dt, \qquad q + \frac{dq}{dt}dt, \qquad r + \frac{dr}{dt}dt,$$

et que, par suite, le mouvement relatif, différence géométrique des deux rotations OA et OA′, est une rotation ayant pour axe OS, et dont les projections sur les axes sont

$$\frac{dp}{dt}dt, \qquad \frac{dq}{dt}dt, \qquad \frac{dr}{dt}dt;$$

OS est donc le produit par dt de l'accélération angulaire OJ.

La vitesse relative étant nulle au temps t, l'accélération relative est le quotient par dt de la vitesse relative au temps $t + dt$; or cette vitesse relative due à la rotation OS est égale à OS × MP, MP étant la distance du point M à la droite OJ, l'accélération relative sera donc

$$\frac{\text{OS}}{dt} \times \text{MP} = \text{OJ} \times \text{MP};$$

elle est d'ailleurs dirigée suivant la droite MN normale au plan du point M et de l'accélération angulaire.

On démontre ainsi le théorème de Rivals (n° 91).

CHAPITRE VI[1].

MÉCANISMES.

158. Les mouvements employés dans l'industrie sont des plus simples; ils se ramènent généralement aux deux types suivants : mouvement *circulaire,* mouvement *rectiligne.* Ces mouvements peuvent d'ailleurs être *continus,* c'est-à-dire toujours dans le même sens, ou *alternatifs.*

Les *mécanismes* ont pour but de transformer ces mouvements les uns dans les autres. Parmi les dix combinaisons auxquelles donnent lieu ces quatre mouvements pris deux à deux, avec répétition, nous étudierons les transformations suivantes, qui sont les plus importantes :

1° Deux mouvements circulaires simultanément continus ou alternatifs;

2° Un mouvement circulaire continu et un mouvement alternatif rectiligne ou circulaire;

3° Deux mouvements alternatifs, l'un circulaire, l'autre rectiligne.

159. Les mécanismes rentrent généralement dans les deux types suivants :

Les systèmes articulés dans lesquels les angles varient,

---

(1) Ce Chapitre est extrait en grande partie du Cours fait par M. Poincaré, à la Sorbonne, en 1886.

mais les distances des articulations restent invariables.

Les systèmes en contact dans lesquels une pièce p animée d'un mouvement M, imprime par contact continu à une pièce p' un mouvement M'. Les engrenages rentrent dans ce second type.

1. — Transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement circulaire continu.

Nous distinguerons trois cas, suivant que les axes des deux mouvements sont parallèles, concourants ou quelconques.

1° LES AXES SONT PARALLÈLES.

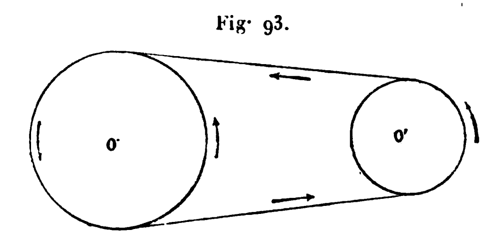
Cette transformation s'opère d'ordinaire, soit par une bielle, soit par des chaînes ou courroies, soit par des engrenages.

160. *Manivelles et bielle d'accouplement.* — Une manivelle est une tige en fer dont une extrémité est calée rectangulairement sur un arbre ou cylindre tournant; l'autre extrémité nommée *maneton* est recourbée parallèlement à l'arbre. Les boutons ou manetons des deux arbres sont réunis à l'aide d'une tringle normale aux deux arbres, et qu'on nomme *bielle d'accouplement.* Si les manivelles OA, O'A' sont de même longueur et si la longueur de la bielle AA' est égale à la distance OO' des axes, la figure OAA'O' reste toujours un parallélogramme et les vitesses angulaires de rotation des deux arbres sont les mêmes à chaque instant.

La barre de la manivelle est souvent remplacée par une roue entière qui porte le bouton. Ce mécanisme est employé dans les locomotives.

161. *Courroie de transmission.* — Deux poulies sont montées sur des arbres parallèles O et O′ (*fig.* 93) et une courroie en cuir flexible et inextensible passe sur la jante de chacune des poulies. Les vitesses de tous les points de la courroie ont même grandeur et comme la courroie ne glisse pas sur les jantes des poulies, il en est de même des vitesses de ces jantes. Si donc V est cette vitesse com-

Fig. 93.



mune, R et R′ les rayons des poulies, ω et ω' leurs vitesses angulaires, on a

$$V = \omega R = \omega' R',$$

d'où

$$\frac{\omega}{\omega'} = \frac{R'}{R};$$

les vitesses angulaires des deux poulies sont en raison inverse de leurs rayons. Ces vitesses sont de même sens dans le cas de la figure, mais si l'on croise la courroie elles sont de sens contraires.

Assez ordinairement, on monte sur l'arbre O′ auquel on veut transmettre le mouvement de l'arbre moteur O, deux roues égales placées à côté l'une de l'autre, l'une calée sur l'arbre et faisant corps avec lui et l'autre *folle* sur laquelle on fait passer la courroie quand on ne veut pas donner de mouvement à l'arbre.

On remplace parfois la courroie par une chaîne à

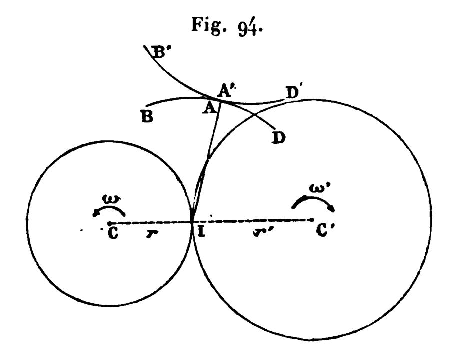
mailles dite de *Vaucanson,* seulement les roues sont alors munies de dents qui entrent dans les mailles.

Pour des communications à de grandes distances on emploie souvent un câble en fil de fer supporté de distance en distance par des galets ou roues folles; dans ce cas, les roues sont munies de gorges qui empêchent le câble de les quitter.

162. *Des engrenages.* — Un engrenage est un système de deux roues liées chacune à un arbre mobile, et qui se commandent mutuellement.

Étudions le cas où les axes de rotation C et C′ (*fig.* 94)

Fig. 94.



des arbres mobiles sont parallèles et supposons d'abord que leurs vitesses angulaires ω et ω' soient de sens contraires. Comme on fait les roues cylindriques afin de répartir l'effort exercé tout le long d'une génératrice, il suffit de considérer la section droite du système.

Soit A le point de contact des courbes BAD, B′A′D′ ou *dents*, liées la première à la roue C, la seconde à la roue C′; proposons-nous de déterminer le rapport des vitesses angulaires de ces roues, ainsi que la vitesse de glissement; considérons, à cet effet, le mouvement relatif de la roue C′

par rapport à la roue C, la vitesse relative étant la différence géométrique de la vitesse absolue et de la vitesse d'entraînement, il suffira pour l'obtenir de composer la rotation absolue ω' avec la rotation d'entraînement ω prise en sens contraire; or les rotations ω' et $-\omega$ étant de même sens, le mouvement relatif est une rotation Ω, autour d'un axe I parallèle aux premiers, situé dans leur plan et tel que

$$\omega \times IC = \omega' \times IC';$$

la droite AI sera donc normale à la vitesse relative du point A′ de la courbe B′D′, c'est-à-dire aux deux courbes en contact. Enfin la vitesse de glissement sera la vitesse relative de A′, elle aura pour expression

$$v_g = \Omega \times AI = (\omega + \omega')\, AI$$

ω et ω' étant les valeurs absolues des rotations. En pratique, la roue conductrice a une vitesse uniforme et l'on tient à ce qu'il en soit de même de l'autre, pour éviter les efforts considérables qui se produiraient, à cause de l'inertie, s'il y avait des variations dans la vitesse de la roue conduite; la première condition à réaliser est donc que le point I soit fixe, et alors la normale commune au profil des dents en contact passe par ce point fixe I. Cette condition étant remplie, le rapport des vitesses angulaires sera constant et le même que si la communication de mouvement avait lieu par le roulement des circonférences de rayons CI et C′I, qu'on nomme pour cette raison *circonférences primitives*.

De la formule qui donne la vitesse de glissement on conclut qu'il n'y a roulement des dents que si leur contact a lieu sur la ligne des centres; cette vitesse étant proportionnelle à la normale AI, il y a intérêt à ce que le contact

ait lieu le plus près possible du point I, de là la nécessité de réduire les dimensions des dents qui doivent successivement venir en contact, ce qui revient à augmenter leur nombre autant que le permet leur solidité.

163. *Détermination du profil des dents.* — Le problème à résoudre est celui-ci :

Connaissant le profil B'D' d'une dent de la roue C', déterminer le profil BD d'une dent de la roue C.

Considérons, à cet effet, les roues comme invariablement liées aux circonférences primitives de rayons r et r' ; dans le mouvement de C' relativement à C, les circonférences primitives resteront tangentes et il en sera de même des dents ; d'ailleurs la vitesse relative du point de contact I de C' sera nulle puisque I est l'axe instantané de la rotation relative, le mouvement relatif est donc épicycloïdal. Les dents devant rester constamment en contact, le profil de D sera l'enveloppe des positions que prendra D' dans ce mouvement épicycloïdal ; de plus la normale commune à D et à D' passera à chaque instant par le centre instantané de rotation.

On peut donc imaginer une infinité d'espèces d'engrenages, suivant le profil que l'on donne à l'une des dents ; pratiquement on n'en a guère employé que trois.

164. *Engrenages à lanterne.* — Les dents de la roue C' sont des cercles égaux dont les centres sont sur la circonférence primitive C' ; elles prennent le nom de *fuseaux*, la roue C' s'appelle *lanterne* et la roue C *rouet*.

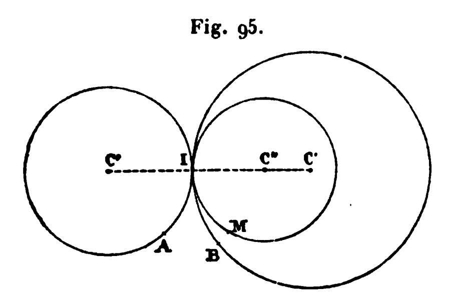
Ces engrenages que l'on trouve encore dans quelques vieilles machines, ne sont plus employés.

165. *Engrenages à dents épicycloïdales.* — Le profil

de la dent D′ est ici une épicycloïde ayant pour base la circonférence C′ ; la recherche du profil de la dent D, qu'on nomme *conjugué* du premier, est basée sur le théorème suivant :

Le profil conjugué d'une épicycloïde ayant pour base la circonférence primitive C′ *et pour roulante la circonférence* C″, *est une autre épicycloïde ayant pour base*

Fig. 95.



l'autre circonférence C *et pour roulante la circonférence* C″ (*fig.* 95).

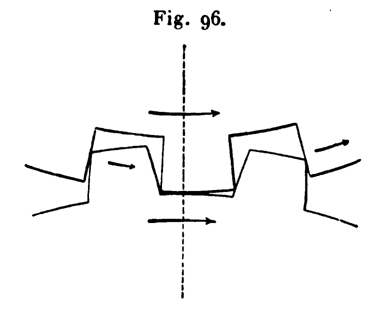
A et B étant deux points fixes des circonférences primitives C et C′ qui doivent venir en contact, on aura constamment, dans le roulement de C′ sur C, arc BI = arc AI ; soit C″ une circonférence assujettie à toucher constamment les deux autres en leur point de contact I, avec la condition arc MI = arc AI, M étant un point fixe de la circonférence C″, le mouvement absolu de M sera un mouvement épicycloïdal résultant du roulement de C″ sur C. Comme on a aussi arc MI = arc BI, C″ dans son mouvement relativement à C′ engendrera également une épicycloïde et les deux épicycloïdes E′ et E sont tangentes en leur point commun M, puisqu'elles admettent la même normale MI. Si donc on considère le mouvement relatif de C′ par rapport à C regardé comme fixe, l'épicycloïde E′ entraînée

avec C', touchant constamment l'épicycloïde fixe E, cette dernière sera l'enveloppe de la première, ce qui montre que le profil conjugué de l'épicycloïde E' est l'épicycloïde E.

Dans le cas particulier qui est celui de la pratique, où la circonférence C'' étant intérieure à C', on a $r'' = \frac{r'}{2}$, on a vu (n° 42) que l'épicycloïde E' est un diamètre du cercle C', la dent D' est donc plane, on la nomme *flanc* et l'épicycloïde conjuguée E se nomme *face*. On voit immédiatement que le point M étant intérieur à C' et extérieur à C, les flancs sont intérieurs et les faces extérieures respectivement à leurs circonférences primitives.

166. Cela posé, considérons deux dents sur chaque roue, l'une en deçà, l'autre au delà de la ligne des centres, on voit qu'avant le passage à la ligne des centres les flancs poussent les faces (*fig.* 96) et que c'est l'inverse

Fig. 96.

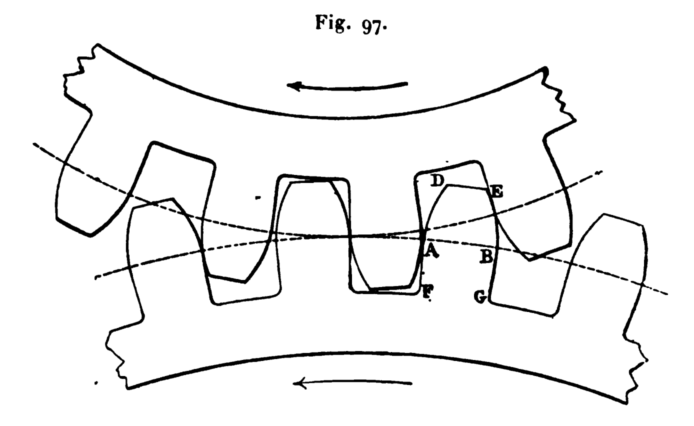


qui se produit au delà de la ligne des centres. Il résulte de là que si l'on ne donnait de flancs qu'à la roue conduite, par exemple, le contact utile n'aurait lieu qu'après la ligne des centres; pour obvier à cet inconvénient on donnera des flancs et des faces à chacune des deux roues.

Une dent se composera donc de deux parties, une inté-

rieure à la circonférence primitive (on désigne sous le nom de *creux* la partie intérieure comprise entre deux dents) dont les côtés AF et BG (*fig.* 97), portions de rayons de la circonférence primitive, constitueront les flancs; l'autre partie ADEB extérieure à la circonférence primitive (que l'on appelle plus particulièrement *dent* ou *saillie*) sera

Fig. 97.



limitée par des arcs d'épicycloïde AD, BE, profils conjugués des flancs de l'autre roue. Les saillies et les fonds des creux sont limités par des circonférences concentriques à la circonférence primitive.

167. *Engrenages à développantes de cercles.* — Soient C et C′ les deux circonférences primitives de centres O et O′ (*fig.* 98); prenons comme profil D′ la développante d'une circonférence A′B′ de centre O′, le profil conjugué D sera la développante d'une circonférence AB de centre O. Si, en effet, M est le point où la courbe D′ touche son enveloppe D pour la position C′ de la roulante dans le mouvement relatif de C′ par rapport à C, MI est tangente à la circonférence A′B′ comme normale

à sa développante D′ ; de plus MI est normale à l'enveloppe des diverses positions de D′, or la distance OB du point O à cette droite est constante en vertu de la similitude des triangles rectangles IOB, IO′B′, qui donnent

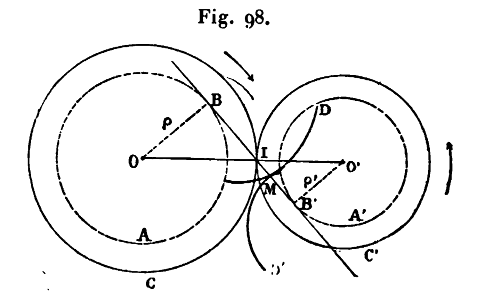
$$\frac{OB}{O'B'} = \frac{r}{r'},$$

d'où

$$OB = \rho = \rho' \times \frac{r}{r'} = \text{const.},$$

donc les normales à la courbe D conjuguée de D′ sont

Fig. 98.



tangentes à un cercle fixe de rayon ρ et par suite D est une développante de cette circonférence AB.

On voit encore que, dans le mouvement réel, le point de contact M se déplace sur la tangente commune BB′ aux circonférences ρ et ρ′.

168. L'engrenage à développantes présente sur l'engrenage à flancs trois avantages.

1° Avec cet engrenage on peut faire conduire par une même roue O plusieurs roues O′, O″, ... de diamètres difrents. Il suffit, en effet, pour que ces engrenages soient corrects, que les rayons ρ, ρ′, ρ″, ... des circonférences dont

on trace les développantes, satisfassent aux relations

$$\frac{\rho}{r} = \frac{\rho'}{r'} = \frac{\rho''}{r''} = \ldots,$$

ce qui est toujours possible.

L'engrenage à flancs, au contraire, est impossible si les rayons r', r'', ... ne sont pas tous égaux, car pour que O engrène régulièrement avec O', il faut que ses faces soient des arcs d'épicycloïde ayant pour base la circonférence O et pour roulante une circonférence de rayon $\frac{r'}{2}$, mais alors elle n'engrènera plus régulièrement avec O'', ... On peut toutefois tourner la difficulté comme suit : Construisons les dents de O et O' sans nous inquiéter des autres roues, puis prenons pour profil des dents de O'' les profils conjugués des flancs et des faces de O, nous obtiendrons ainsi pour O'' des dents dont les parties intérieures à la circonférence primitive ne seront plus planes, ce qui est une complication.

2° Si la distance des axes est altérée soit par vice d'ajustage, soit par usure des tourillons, l'engrenage à flancs cesse d'être exact. Supposons, en effet, que pour une cause quelconque la distance des axes ait varié, et soient R et R' les rayons des nouvelles circonférences primitives, on devra avoir simultanément

$$\omega r = \omega' r', \qquad \omega R = \omega' R',$$

d'où

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'} = \frac{R + R'}{r + r'} = k \lessgtr 1$$

et par suite

$$R = kr, \qquad R' = kr'.$$

Mais alors, pour que les profils des dents de O fussent

exacts, il faudrait que les saillies soient des arcs d'épicycloïde engendrés par une circonférence de rayon $\frac{kr'}{2}$ roulant sur une circonférence de rayon kr, ce qui n'a pas lieu ; donc l'engrenage à flancs n'est plus exact.

Au contraire, l'engrenage à développantes reste exact malgré la variation de distance des axes, puisque la relation à vérifier $\frac{\rho}{R} = \frac{\rho'}{R'}$ l'est en vertu de $\frac{\rho}{r} = \frac{\rho'}{r'}$. Cet avantage est le plus important.

3° L'usure des dents d'un engrenage à développantes de cercle, si elle est uniforme, n'altérera pas les propriétés de l'engrenage. En effet, le profil de chaque dent étant transformé en un autre qui lui est parallèle, ces courbes admettront les mêmes normales et, par suite, la même développée, elles seront donc les développantes du même cercle.

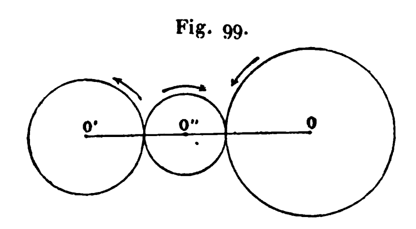
Malgré ces avantages, l'engrenage à développantes de cercles est beaucoup moins employé que l'engrenage à flancs parce que, toutes choses égales d'ailleurs, les dents de l'engrenage à développantes de cercles sont beaucoup plus minces à leur extrémité que celles de l'engrenage à flancs, et par suite présentent beaucoup moins de résistance. On ne l'emploie guère que quand on veut faire conduire un grand nombre de roues par une seule autre.

En horlogerie on se sert exclusivement de l'engrenage à flancs.

169. *Engrenages intérieurs.* — Nous avons supposé jusqu'ici que les vitesses de rotation des deux arbres étaient de sens contraires. On peut avoir aussi à transformer un mouvement de rotation en un mouvement de rotation de même sens. Si la place le permet, on introduira une roue intermédiaire O'' (*fig.* 99) ; la roue O tour-

nant dans un certain sens fera tourner O″ en sens inverse et cette même roue O″ imprimera à la roue O′ une rota-

Fig. 99.

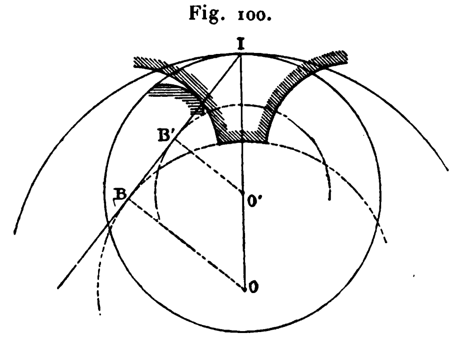


tion contraire à la sienne propre, c'est-à-dire de même sens que celle de la roue O.

Si la distance des axes de rotation O et O′ ne permet pas de loger cette roue intermédiaire, il faudra recourir aux engrenages intérieurs.

Soient O et O′ les axes de rotation (*fig.* 100), ω et ω'

Fig. 100.



les vitesses angulaires supposées de même sens, nous prendrons sur OO′ prolongé dans un sens convenable un point I tel que

$$\omega \times OI = \omega' \times O'I,$$

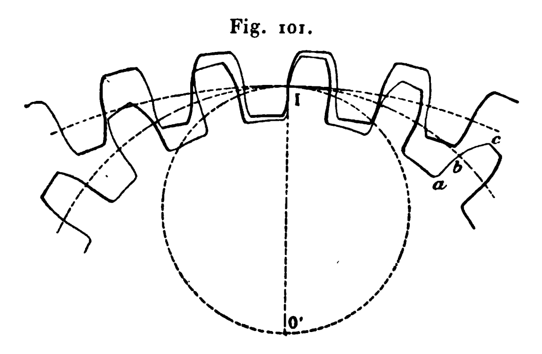
les circonférences de centres O et O′ et tangentes en I seront les circonférences primitives.

La théorie des engrenages intérieurs est la même que celle des engrenages extérieurs.

Pour réaliser l'engrenage à développantes de cercles, on mènera par I une droite quelconque IB, les distances des points O et O′ à cette droite seront les rayons ρ et ρ' des cercles dont on prendra les développantes pour profils des dents ; les centres de courbure B et B′ de ces développantes étant tous deux du même côté de I, les profils des dents ont leurs concavités dans le même sens et alors les dents de la grande roue sont concaves, ce qui les rend faibles à leur extrémité ; à cause de cet inconvénient, ces engrenages sont peu employés.

On peut aussi employer l'engrenage à flancs, mais on ne pourra donner à la fois à la grande roue des flancs et

Fig. 101.



des faces. Nous avons vu, en effet, que le lieu des points de contact des flancs de la petite roue O′, avec les faces de la grande roue O (*fig.* 101), était une circonférence décrite sur IO′ comme diamètre ; ces points de contact sont donc à l'intérieur de la circonférence primitive O. Par suite les faces de la roue O devraient, comme ses flancs, être intérieurs à la circonférence O ; ces deux profils ne peuvent donc exister simultanément.

On donne ordinairement des flancs à la petite roue et des faces à la grande; le contact ne peut alors avoir lieu que d'un côté de la ligne des centres. On évite cet inconvénient avec la solution suivante :

Donnons des flancs *ab* à la petite roue O′ et prolongeons-les par un arc d'épicycloïde quelconque *bc*, qui formera les faces. Il faudra donner comme profil à la grande roue les profils conjugués de *ab* et de *bc*; ce seront deux arcs d'épicycloïde, seulement la portion conjuguée de *bc*, extérieure à la circonférence primitive, sera une épicycloïde concave.

170. *Crémaillère*. — Si l'on fait infini le rayon de la circonférence primitive O′, celle-ci devient une droite; l'engrenage prend alors le nom de *crémaillère*. Cet appareil sert à transformer deux *mouvements continus, l'un circulaire, l'autre rectiligne*.

On emploie d'ordinaire l'engrenage à flancs. Les profils conjugués des flancs de la tige sont des épicycloïdes engendrées par une circonférence de rayon $\frac{r'}{2} = \infty$, c'est-à-dire par une droite, qui roule sur la circonférence O; ces épicycloïdes sont des développantes de cercle. Les dents de la roue O ont donc pour faces des développantes de cercle.

Les faces de la tige, profils conjugués des flancs de la roue, seront engendrées par une circonférence de rayon $\frac{r}{2}$ qui roule sur une droite; ce seront des arcs de cycloïde.

171. *Détails pratiques sur les engrenages*. — Les dents et les creux doivent avoir une forme symétrique, afin que l'engrenage puisse tourner dans les deux sens, et

encore pour que la même roue puisse être tantôt menante, tantôt menée, pour un même sens de rotation.

Soient n et n' les nombres des dents des roues O et O'; quand la première roue tourne de l'angle $\frac{2\pi}{n}$, une dent prend la place de celle qui la suivait et il en est de même pour la seconde roue, qui tourne de l'angle $\frac{2\pi}{n'}$; ces deux angles parcourus dans des temps égaux par les deux roues doivent être proportionnels aux vitesses angulaires ω et ω', on a donc

$$\frac{2\pi}{n} : \omega = \frac{2\pi}{n'} : \omega,$$

ou

$$n\omega = n'\omega'.$$

On appelle *pas* le quotient de la circonférence primitive par le nombre des dents; si donc a et a' sont les pas des roues O et O', on aura

$$2\pi r = na, \qquad 2\pi r' = n'a',$$

d'où

$$\frac{r}{r'} = \frac{na}{n'a'};$$

d'ailleurs

$$\frac{r}{r'} = \frac{\omega'}{\omega} = \frac{n}{n'},$$

ce qui exige que $a = a'$, les pas des deux circonférences primitives sont donc égaux. Les intervalles des dents de l'une des roues doivent être suffisants pour loger les dents de l'autre; on donne généralement un jeu qui varie entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{20}$. Pour satisfaire à l'égalité des pas des deux roues on fait les bases des dents, comptées sur les circonférences primitives, égales entre elles; il en est alors de même des

intervalles qui excèdent les bases du jeu que l'on veut donner à l'engrenage.

Afin de conserver aux dents une solidité suffisante, malgré leur petite épaisseur, on leur donne parallèlement à l'axe de rotation une assez grande dimension qu'on appelle *largeur* de la denture et qui est de quatre à cinq fois l'épaisseur.

Bien que théoriquement un engrenage puisse servir à transformer *deux mouvements simultanément alternatifs*, cela n'est pas possible en pratique, à cause des ruptures de dents qu'amèneraient infailliblement les variations de vitesse.

172. *Détermination du nombre des dents des roues d'un engrenage.* — Le nombre des dents d'une roue d'un engrenage a une limite inférieure, qui est ordinairement de dix dents, sauf en horlogerie où l'on se contente de six dents. Ce nombre de dents a aussi une limite supérieure, sans quoi on ne pourrait exécuter l'engrenage.

D'un autre côté, pour éviter de faire des roues trop grandes ou trop petites, le rapport des vitesses des deux roues ne doit pas être trop petit. Sa limite inférieure est ordinairement $\frac{1}{5}$; en horlogerie on va jusqu'à $\frac{1}{12}$. Pour tenir compte de ces diverses conditions, voici comment on procède :

Soient deux axes parallèles O_1 et O_n animés de vitesses de rotation ω_1 et ω_n ; on établira une série d'axes intermédiaires $O_2, O_3, \ldots, O_{n-1}$, de vitesses $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_{n-1}$, parallèles aux premiers et situés dans leur plan. Sur O_1 on montera une roue A_1, sur O_2 deux roues B_1 et A_2, sur O_3 les roues B_2 et $A_3, \ldots$, sur O_n une seule roue B_n. La roue A_1 engrènera avec B_1, A_2 avec $B_2, \ldots$, A_n avec B_n ; si α est le nombre de dents d'une roue A et β d'une roue B, on

aura successivement

$$\omega_1 \alpha_1 = \omega_2 \beta_1, \qquad \omega_2 \alpha_2 = \omega_3 \beta_2 \ldots, \qquad \omega_{n-1} \alpha_{n-1} = \omega_n \beta_{n-1},$$

d'où

$$\omega_1 \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1} = \omega_n \beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1}$$

ou

$$\frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}}{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_{n-1}},$$

ce qui permet d'obtenir pour les nombres α et β de dents des diverses roues des nombres moindres que ceux qui représentent le quotient donné $\frac{\omega_n}{\omega_1}$.

Supposons, par exemple, que nous voulions réaliser le rapport des vitesses $\frac{1}{60}$, nous prendrons un axe intermédiaire O_2 et nous aurons

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\beta_1 \beta_2} = \frac{1}{60};$$

posons

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 6,$$

d'où

$$\beta_1 \beta_2 = 6^2 \times 60,$$

nous prendrons alors

$$\beta_1 = 45, \qquad \beta_2 = 48.$$

La méthode qui précède cesse d'être applicable si le rapport $\frac{\omega_n}{\omega_1}$ contient à l'un de ses termes un facteur premier très grand ; cela se présente pour certaines horloges qui, comme celle de Strasbourg, donnent à la fois le jour de la semaine et l'âge de la Lune ; on trouve, en effet, dans ce cas

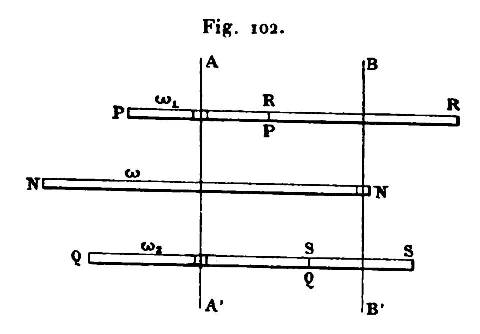
$$\frac{\omega_n}{\omega_1} = \frac{1439}{3485} = \frac{1439}{85 \times 41}.$$

Le nombre 1439 étant premier, il faudrait donner 1439 dents à l'une des roues, ce qui est presque impossible. On a recours alors aux trains épicycloïdaux.

173. *Trains épicycloïdaux.* — Soit AA′ un axe de rotation sur lequel est calée une roue N (*fig.* 102) de vitesse angulaire ω; cette roue N porte un axe BB′ parallèle à AA′ et qu'elle entraîne dans sa rotation.

L'axe AA′ porte encore deux roues P et Q non calées;

Fig. 102.



on fait tourner la roue Q avec la vitesse angulaire ω_2. Enfin l'axe BB′ porte deux roues calées R et S qui engrènent respectivement avec P et Q; le mouvement se communique ainsi à la roue P et lui donne une certaine vitesse angulaire ω_1 que nous nous proposons de déterminer, connaissant les nombre p, q, r et s qui représentent respectivement les nombres de dents des roues P, Q, R et S.

Considérons, à cet effet, le mouvement du système relativement à la roue N, mouvement dans lequel les axes AA′ et BB′ sont fixes; les vitesses relatives de P et Q sont $\omega_1 - \omega$ et $\omega_2 - \omega$, si donc α est celle de BB′ commune à R et S, nous aurons

$$(\omega_2 - \omega)\, q = \alpha s, \qquad (\omega_1 - \omega)\, p = \alpha r,$$

d'où l'équation

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\omega_2 - \omega} = \frac{rq}{ps},$$

qui donne ω_1.

Dans la plupart des cas on suppose la roue Q immobile, $\omega_2 = 0$ et l'on a

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{ps - rq}{ps}.$$

Nous pourrons alors réaliser le rapport $\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1439}{3485}$; nous aurons, en posant $ps = 3485$,

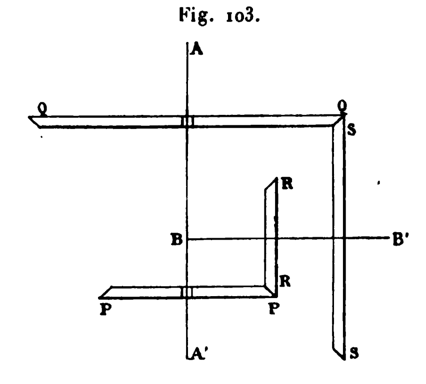
$$rq = 3485 - 1439 = 2046 = 33.62,$$

d'où la solution

$$p = 41, \qquad s = 85, \qquad r = 33, \qquad q = 62.$$

On peut aussi se servir des trains épicycloïdaux pour

Fig. 103.



réaliser des rapports très petits entre les vitesses de rotation des deux roues. Prenant, par exemple

$$p = s = n, \qquad r = n + 1, \qquad q = n - 1,$$

nous aurons

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{1}{n^2}.$$

Les engrenages coniques peuvent être employés dans les trains épicycloïdaux. Considérons, par exemple, un axe AA′ sur lequel sont montées deux roues P et Q non calées (*fig.* 103). L'axe AA′ en tournant, entraîne dans son mouvement un axe BB′ qui lui est perpendiculaire et sur lequel sont calées deux roues R et S; la roue fixe Q engrène avec S et R avec la roue P comme dans le train épicycloïdal que nous avons étudié.

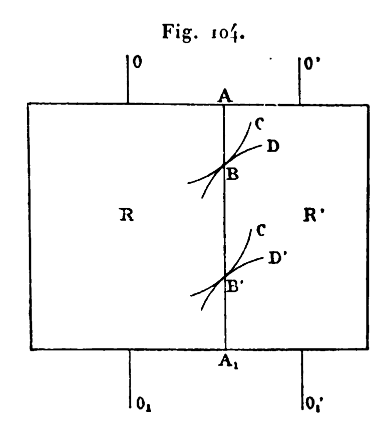
174. ***Engrenages hélicoïdaux de Hooke et de White.*** — Dans les engrenages étudiés jusqu'à présent il y a glissement des roues dentées, parce que leur contact n'a généralement pas lieu au point de tangence des circonférences primitives; les engrenages hélicoïdaux, imaginés par Hooke en 1674 et réinventés par White en 1808, ont pour but de remédier à cet inconvénient.

Considérons deux arbres parallèles OO_1, $O'O'_1$, de vitesses angulaires constantes ω et ω', et les cylindres primitifs R et R′ de ces deux arbres (*fig.* 104); l'engrenage se fera sans frottement si le contact des dents a constamment lieu en un point quelconque de la génératrice commune AA_1 des cylindres.

Pour y arriver, soient BC et BD deux courbes quelconques situées dans le plan des deux axes et en contact en B sur la génératrice AA_1; donnons à chacune de ces courbes des mouvements hélicoïdaux autour des axes OO_1, $O'O'_1$, nous engendrerons ainsi deux surfaces hélicoïdales. Dans le mouvement de rotation de chacune des roues, les deux courbes méridiennes BC, BD, sections des surfaces par le plan des axes, se déplaceront parallèlement à ces

axes, et l'on pourra choisir le pas de chacune de ces surfaces, de telle sorte que le mouvement de translation de ces courbes soit le même ; soit V cette vitesse commune de translation, constante comme les rotations. Alors le contact des deux méridiennes sera réalisé à un instant quelconque et le point de contact se déplacera simplement

Fig. 104.



le long de la génératrice AA_1 ; si donc h et h' sont les pas des deux surfaces hélicoïdales, on devra avoir

$$V = \frac{h}{2\pi}\omega = \frac{h'}{2\pi}\omega',$$

d'où

$$\omega h = \omega' h',$$

et comme

$$\omega r = \omega' r',$$

on aura encore

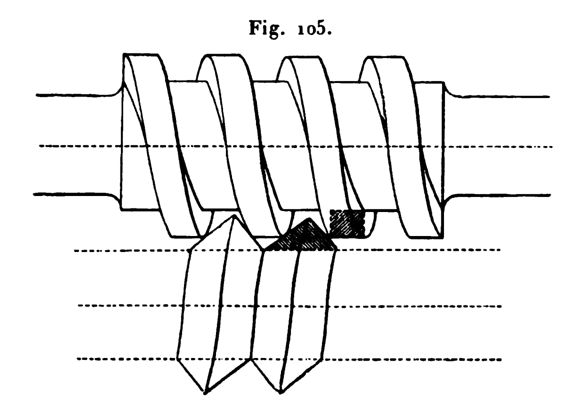
$$\frac{h}{r} = \frac{h'}{r'};$$

les pas doivent être proportionnels aux rayons des cylindres primitifs.

En pratique, l'une des vis est à filet carré (n° 185), et l'autre à filet triangulaire ou carré (*fig.* 105).

Ces engrenages ne sauraient transmettre des efforts notables sans s'user très rapidement. Ils ont été employés

Fig. 105.



avec succès pour faire tourner des axes avec une grande vitesse, en les adaptant à des appareils très légers.

2° LES AXES SONT CONCOURANTS.

175. Lorsque les axes de rotation sont concourants, la solution du problème de la transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement du même genre peut être obtenue soit par les engrenages coniques, soit par le joint universel de Cardan.

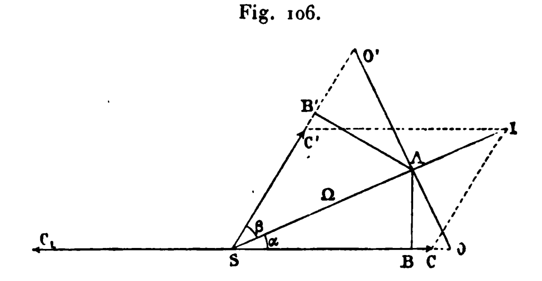
176. *Engrenages coniques.* — Soient SC_1, SC' les axes représentatifs des rotations concourantes ω et ω' que l'on suppose constantes; le mouvement de la roue R' liée à SC' relativement à la roue R entraînée avec SC_1, est une rotation résultante Ω de $SC' = \omega'$ et $SC = \omega$ égale et

de sens contraire à SC_1 (*fig.* 106). Si donc M est le point de contact des deux roues et p sa distance à l'axe SI de la rotation relative instantanée, la vitesse de glissement des deux roues sera

$$v_g = p\Omega.$$

Les lieux des axes instantanés SI relativement aux roues R et R′ sont deux cônes de révolution autour des axes SC,

Fig. 106.



SC′; ces cônes qui, dans le mouvement de R′ relativement à R, roulent l'un sur l'autre, se nomment *cônes primitifs*.

On donne aux dents des roues la forme de cônes ayant S pour sommet, le contact a lieu alors tout le long d'une génératrice. Pour achever de déterminer les dents, de S comme centre avec un rayon arbitraire SA, décrivons une sphère, son intersection avec les dents sera le profil sphérique des dents. On voit qu'on peut déterminer les profils des dents coniques sur cette sphère, qui coupe les cônes suivant les petits cercles de rayons AB, AB′, par des considérations et des constructions analogues à celles qui ont été employées pour les engrenages cylindriques; les droites sont remplacées par des arcs de grands cercles et les épicycloïdes planes par des épicycloïdes sphériques résultant du roulement du cercle AB′ sur le cercle AB.

177. Dans la pratique, par une approximation qui suffit, on ramène la construction du profil sphérique à la construction d'un profil plan. Par le point A de la génératrice de contact des cônes primitifs, on mène la droite OO′ perpendiculairement à cette génératrice, puis on considère les points O et O′ de rencontre de cette droite avec les axes comme les sommets de cônes droits ayant pour bases les cercles primitifs de rayons AB et AB′, et c'est sur les surfaces développées de ces cônes que l'on trace les directrices ou profils des surfaces coniques des dents.

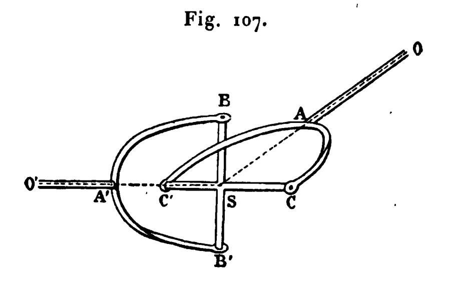
Pour construire les profils des dents sur les cônes O et O′, remarquons que les circonférences AB, AB′ de ces cônes roulent l'une sur l'autre; or, le point de contact des profils coniques étant toujours très voisin de A, ces profils diffèrent fort peu de leur développement sur le plan tangent en A à la sphère qui est aussi tangent aux deux cônes; on peut donc admettre que les profils coniques étant constamment tangents, il en sera de même de leur développement sur le plan. En conséquence, on développera les deux surfaces OAB, O′AB′ en deux secteurs ayant pour distance des centres la longueur OO′, pour rayons les distances OA, O′A, et pour bases des arcs de même longueur que les circonférences primitives de rayons AB et AB′, puis on prendra ces arcs comme cercles primitifs d'un engrenage plan dont on fera le tracé.

Les profils F et F′ de cet engrenage plan étant construits, on enroulera ces figures sur les cônes O et O′ et l'on aura ainsi sur ces cônes les profils des dents coniques de sommet S qui doivent constituer l'engrenage.

178. *Joint de Cardan.* — Ce mécanisme nommé encore *joint universel* ou *joint hollandais*, se compose d'un *croisillon* BB′, CC′ (*fig.* 107) dont les branches

sont à angle droit; les axes de rotation OA, O'A' portent chacun une fourche CAC', BA'B' invariablement fixée à l'axe et articulée aux extrémités de deux bras opposés du

Fig. 107.

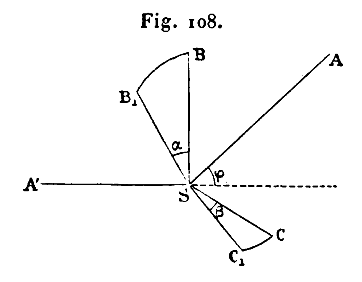


croisillon. Le centre S du croisillon coïncide avec le point de concours des deux axes.

Dans cet appareil, on peut faire varier à volonté l'angle des axes; toutefois, en pratique, cet angle ne devra pas être inférieur à 135°. On se sert surtout du joint de Cardan pour les mouvements à la main ou pour les mouvements lents, parce que le rapport des vitesses de rotation des deux axes n'est pas constant.

179. Proposons-nous de trouver la relation entre les déplacements angulaires simultanés des deux arbres à

Fig. 108.



partir d'une position déterminée, par exemple celle où

l'axe SB est perpendiculaire au plan fixe ASA', tandis que l'axe SC est dans ce plan (*fig.* 108).

Supposons que le premier arbre tourne autour de SA' d'un angle α, le rayon SB vient en SB_1 et SC en SC_1, soit β l'angle CSC_1, les deux droites SC et SC_1 sont avec SB dans un plan normal à SA. Si donc on considère le trièdre SBB_1C_1, il a pour angles plans α, $\frac{\pi}{2}+\beta$ et $B_1SC_1=\frac{\pi}{2}$; le dièdre SB opposé à ce dernier angle est l'angle de deux plans normaux aux axes de rotation, il est égal à l'angle aigu φ de ces axes.

Appliquant à ce trièdre la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

en y faisant

$$a=\frac{\pi}{2}, \qquad b=\alpha, \qquad c=\frac{\pi}{2}+\beta, \qquad A=\varphi,$$

il vient

$$\operatorname{tang}\beta = \operatorname{tang}\alpha \cos\varphi.$$

Les angles α et β sont donc en même temps nuls ou droits, mais inégaux en dehors de ces cas. La transmission de mouvement serait impossible si l'angle φ était droit.

Cherchons la relation entre les vitesses angulaires $\frac{d\alpha}{dt}=\omega$, $\frac{d\beta}{dt}=\omega'$; on a, en différentiant l'équation précédente,

$$\frac{d\beta}{\cos^2\beta}=\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\cos\varphi,$$

$$\omega'=\frac{\omega\cos\varphi\,(1+\operatorname{tang}^2\alpha)}{1+\operatorname{tang}^2\beta}=\frac{\omega\cos\varphi}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\varphi},$$

$$\omega'=\frac{\omega\cos\varphi}{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi};$$

α est la seule variable qui entre dans l'expression du rapport $\frac{\omega'}{\omega}$. Pour $\sin^2\alpha = 0$, $\frac{\omega'}{\omega} = \cos\varphi$; pour $\sin^2\alpha = 1$, $\frac{\omega'}{\omega} = \frac{1}{\cos\varphi}$. Ainsi le rapport des vitesses varie entre $\cos\varphi$ et son inverse.

Les vitesses sont égales quand on a

$$(1 + \tang^2\alpha)\cos\varphi = 1 + \tang^2\alpha\cos^2\varphi,$$

$$\tang^2\alpha = \frac{1 - \cos\varphi}{\cos\varphi - \cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}.$$

Quand l'angle φ atteint sa limite pratique $\varphi = 45°$, le rapport des vitesses varie de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ à $\sqrt{2}$, c'est-à-dire du simple au double.

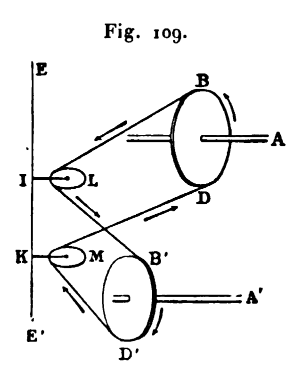
3° LES AXES NE SONT PAS DANS UN MÊME PLAN.

180. On peut opérer la transformation de mouvement par des équipages de roues dentées ou par des courroies de transmission; on fait encore la transformation directe par des engrenages hyperboliques, ou, si les axes sont rectangulaires, par la vis sans fin.

181. *Équipages de roues dentées.* — Le moyen communément employé pour établir une communication de mouvement, par roues dentées, entre deux arbres dont les axes ne sont pas dans un même plan, consiste à établir un arbre intermédiaire dont l'axe rencontre les deux axes donnés ou bien est parallèle à l'un d'eux et rencontre l'autre. Ce que nous avons dit sur les engrenages cylindriques ou coniques permet d'établir facilement le rapport des vitesses angulaires des deux arbres ainsi mis en communication.

182. *Poulies et courroies.* — Soient (*fig.* 109) les deux arbres non parallèles A et A′ qu'il s'agit de mettre en communication de mouvement; fixons à ces arbres les deux poulies BD, B′D′ dont les diamètres sont dans un rapport inverse de celui des vitesses angulaires qu'on veut obtenir. Les plans médians de ces poulies se coupent suivant une droite EE′; par un point I quelconque de

Fig. 109.

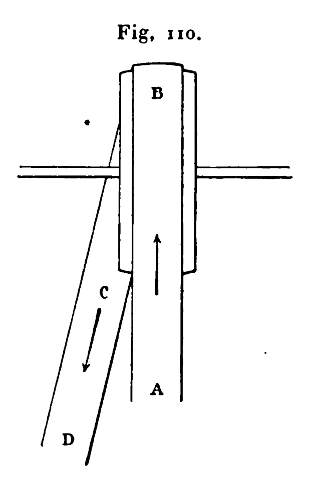


cette intersection menons deux tangentes IB, IB′ aux deux poulies, et dans l'angle BIB′ qu'elles forment établissons une poulie L dite *poulie de renvoi*, tournant librement autour de son axe fixe. Par une construction semblable pour un autre point K de EE′, établissons une seconde poulie de renvoi M, dans l'angle DKD′; une courroie sans fin enveloppant les quatre poulies procurera la communication de mouvement demandée.

183. Quand les arbres A et A′ sont suffisamment éloignés ou font entre eux un angle assez petit, on peut supprimer les poulies de renvoi en se fondant sur la remarque pratique suivante : Lorsqu'une courroie passe sur une poulie il faut, pour qu'elle s'y maintienne, que

la partie AB (*fig.* 110) qui se transporte vers cette poulie soit dirigée de manière que la ligne médiane de la courroie soit dans un plan perpendiculaire à l'axe de rotation de la poulie; mais il est sans inconvénient que la partie CD qui quitte la poulie ait une certaine obliquité. Cela vient de ce que la courroie une fois appliquée en B sur la

Fig. 110.

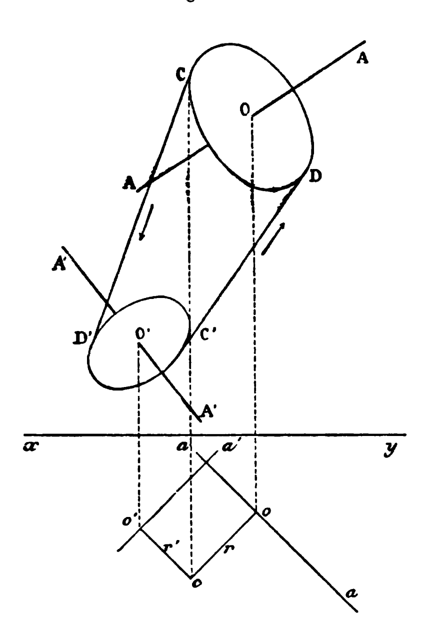


poulie tourne avec elle et y est retenue; la force oblique qui agit suivant CD, tend la courroie et lui donne cette direction, mais ne la fait pas glisser, si l'angle de AB avec CD est assez aigu. Aussi est-ce sur la partie AB qu'on agit à droite ou à gauche, quand on veut *désembrayer* la courroie.

Cela posé, étant donnés les deux axes A et A′, on mènera une droite CC′ qui leur soit normale et dont les distances à ces axes soient respectivement égales aux rayons des poulies (cette construction s'effectuera facilement en projetant les axes sur un plan qui leur soit parallèle); les pieds O et O′ (*fig.* 111) de ces distances seront pris pour centres

des poulies. Disposant alors la courroie comme l'indique la figure, le brin montant, oblique sur le plan de la poulie inférieure qu'il quitte, est dans le plan de la poulie supé-

Fig. 111.

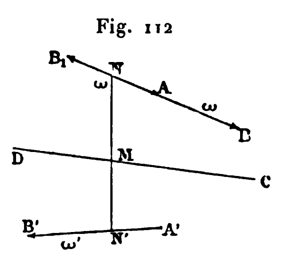


rieure vers laquelle il se transporte; le brin descendant, oblique sur la poulie supérieure d'où il vient, est dans le plan de la poulie inférieure où il va.

184. *Engrenages hyperboliques.* — Soient $AB = \omega$, $A'B' = \omega'$ les axes de rotation des roues R et R' (*fig.* 112); le mouvement de R' relativement à R résultera de la rotation ω' et de la rotation $AB_1 = \omega$ égale et contraire à AB; soit encore CD l'axe instantané de rotation et de glissement, dans ce mouvement hélicoïdal résultant. Faisant

tourner CD successivement autour de AB et de A′B′, on engendre deux hyperboloïdes de révolution H et H′ qui sont les lieux des axes hélicoïdaux dans les corps R et R′. Ces *hyperboloïdes primitifs* sont tangents tout le long de CD (n° 108); on peut le voir directement dans le cas

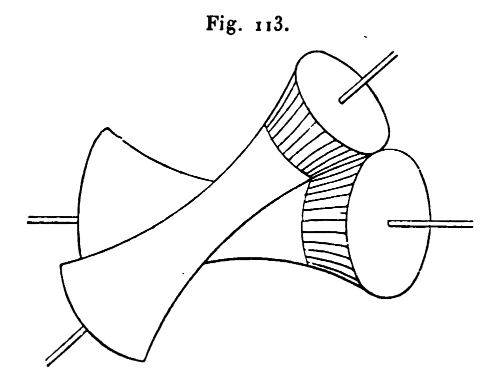
Fig. 112



actuel. Si l'on mène la normale MN au premier, elle rencontre son axe AB et est normale à CD et par suite à la vitesse du point M, il en résulte qu'elle rencontre la droite A′B′ conjuguée de la droite AB, donc elle est aussi normale à l'hyperboloïde H′.

Pour trouver la forme des dents, on pourrait appliquer

Fig. 113.



la construction générale des surfaces enveloppes; on se contente ordinairement de stries tracées le long des géné-

ratrices (*fig.* 113). Comme il y a glissement le long de l'axe hélicoïdal, ces engrenages n'ont jamais lieu sans frottement.

185. *Vis sans fin.* — Elle est employée dans le cas fréquent en pratique, où les axes sont rectangulaires.

Disons d'abord quelques mots des vis en usage. Considérons un cylindre circulaire droit, qui sera le noyau de la vis et prenons sur une des génératrices une longueur égale au pas h, puis divisons-la en n parties égales telles

Fig. 114.

que aa_1 (*fig.* 114) et construisons un rectangle $abcd$ ayant un côté ad dirigé suivant aa_1 et de longueur au plus égale à la moitié de aa_1, $ad \leqq \frac{h}{2n}$. Faisons de même dans chacun des intervalles tels que aa_1, nous aurons ainsi le profil générateur de la vis auquel il suffira d'imprimer un mouvement hélicoïdal de pas égal à h, pour avoir la vis à n filets carrés ; dans ce mouvement, le côté bc engendre un cylindre concentrique au noyau de la vis et les côtés ab et cd des hélicoïdes réglés à plan directeur.

Le profil de la vis à filets triangulaires se compose de triangles isocèles égaux dont les bases sont placées le long d'une génératrice du cylindre.

186. Dans la vis sans fin on emploie la vis à filet carré; le mécanisme se compose d'une vis et d'une roue dentée se touchant dans un plan normal à l'axe de la roue et passant par celui de la vis, qu'on nomme *plan méridien*. Lorsque la vis tourne, son profil situé dans ce plan méridien avance d'un mouvement uniforme, dans la direction de l'axe; tout se passe donc comme si la roue engrenait avec une crémaillère ne portant que des flancs.

Il résulte de là, d'après ce que nous avons vu pour la crémaillère, qu'il faut donner aux dents des roues un profil en développante de cercle. Mais il ne suffit pas que les intersections du plan méridien avec la vis et la dent de la roue se touchent, il faut encore qu'au point de contact les surfaces des deux dents aient même plan tangent. Or, si r est la distance du point de contact à l'axe de la vis, l'angle constant i du plan tangent avec l'axe est donné par la formule $\tang i = \frac{2\pi r}{h}$ et cet angle i est aussi l'angle de ce plan avec le plan méridien. La surface d'une dent de la roue satisfaisant à cette double condition d'avoir pour section une développante de cercle et de faire un angle constant i avec son plan est l'hélicoïde développable. Dans la pratique, on remplace l'hélicoïde développable par un cylindre faisant l'angle i avec l'axe de la roue.

On complète le système en donnant à la crémaillère des faces cycloïdales et des flancs à la roue; le contact a lieu alors de part et d'autre de la ligne des centres.

Soient ω et ω' les vitesses angulaires de la vis et de la roue, n le nombre des filets de la vis, n' le nombre des dents de la roue; appliquant le raisonnement du n° 171, on a

$$\omega n = \omega' n'.$$

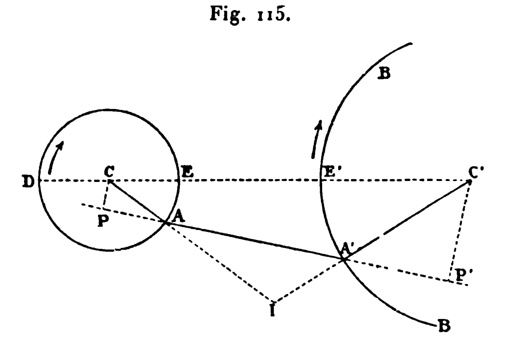
La théorie du frottement montre sous quelle condition

l'engrenage de la vis sans fin est réciproque; elle est amplement remplie quand i est voisin de 45°.

2. — Transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne ou circulaire alternatif.

187. *Bielle et manivelles.* — On réalise d'ordinaire la transformation d'un mouvement circulaire continu en circulaire alternatif, dans le cas des axes parallèles C et C′, à

Fig. 115.



l'aide de deux manivelles CA, C′A′ (*fig.* 115) unies par une bielle AA′.

L'intersection I des normales CA, C′A′ aux trajectoires des extrémités de la bielle est le centre instantané de rotation de cette tige, d'où, pour la relation entre les vitesses angulaires des deux arbres,

$$\frac{\omega r}{\omega' r'} = \frac{AI}{A'I} = \frac{\sin A'}{\sin A}$$

ou

$$\omega r \sin A = \omega' r' \sin A',$$

ou encore, en abaissant des points C et C′ les perpendi-

culaires CP, C′P′ sur la bielle,

$$\omega \times \overline{CP} = \omega' \times \overline{C'P'}.$$

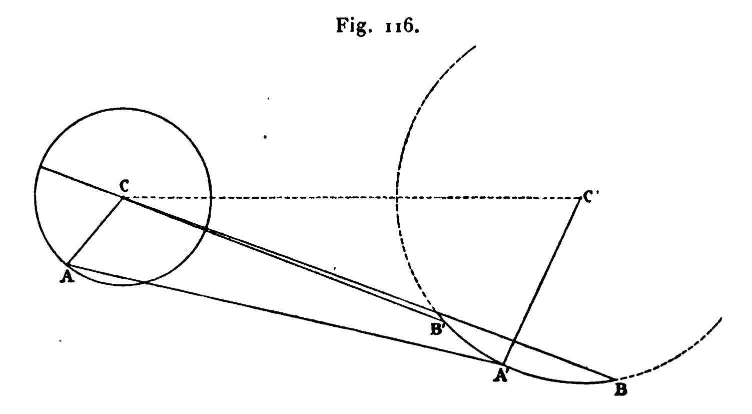
Ainsi les vitesses angulaires sont réciproques aux distances des centres à la bielle.

Il est évident que le seul des deux mouvements qui puisse être continu est celui de la plus petite manivelle CA; la condition nécessaire pour qu'il en soit ainsi est que la longueur l de la bielle soit au moins égale à la distance DE′

$$l \geqq d + r - r',$$

formule dans laquelle d représente la distance des axes

Fig. 116.



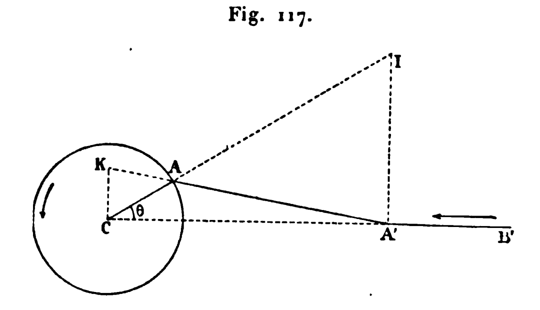
C et C′, r et r' les rayons des manivelles; quand cette condition est remplie, dans un tour complet de la manivelle A (*fig.* 116) l'arc BB′ est décrit deux fois. Les points B et B′ s'obtiennent d'ailleurs en décrivant de C comme centre des arcs de cercle de rayons $l + r$ et $l - r$.

188. La transformation d'un mouvement circulaire con-

tinu en rectiligne alternatif s'opère à l'aide de la bielle à manivelle, des excentriques ou de la coulisse de Stephenson.

189. *Bielle à manivelle.* — Ce mouvement n'est qu'un cas particulier de celui qui précède ; le point A′, au lieu de décrire un arc de cercle, se meut en ligne droite (*fig.* 117). On réalise cette transformation de mouvement en articulant la bielle en A′ avec une tige A′B′ assujettie, à l'aide de glissières, à prendre un mouvement rectiligne dont la direction passe par le point C.

Fig. 117.



La vitesse v de la tige est donnée par la formule

$$\frac{v}{\mathrm{IA'}} = \frac{\omega r}{\mathrm{IA}}, \qquad v = \omega \times \mathrm{CK},$$

la droite CK étant menée normalement à CA′ jusqu'à sa rencontre avec la direction de la bielle.

Déterminons la loi du mouvement de la tige ; on a

$$\mathrm{CA'} = \mathrm{L} = r\cos\theta + l\cos\mathrm{A'};$$

or

$$\sin\mathrm{A'} = \frac{r}{l}\sin\theta = k\sin\theta,$$

d'où

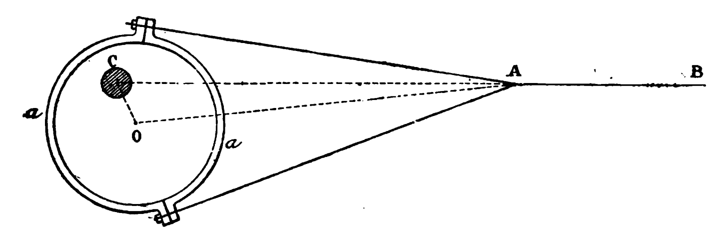
$$\cos A' = (1 - \sin^2 A')^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{k^2}{2}\sin^2\theta - \frac{k^4}{8}\sin^4\theta - \ldots$$

Le rapport $k = \frac{r}{l}$ n'est jamais plus grand que $\frac{1}{4}$, aussi néglige-t-on le terme en k^4 et les suivants; on a alors

$$L = r\cos\theta + l - l\frac{k^2}{2}\sin^2\theta = l + r\left(\cos\theta - \frac{k}{2}\sin^2\theta\right).$$

190. *Excentrique circulaire.* — Il se compose d'un plateau circulaire en métal, calé sur l'arbre moteur C en un point autre que son centre O (*fig.* 118); ce disque

Fig. 118.



est embrassé par un collier *aa*, appelé *bague* et qui porte deux tiges nommées *barres d'excentrique,* servant à le relier à l'extrémité A de la tige AB qu'on veut faire mouvoir d'un mouvement rectiligne alternatif suivant la direction BA passant par l'axe C de rotation.

Les longueurs des droites OA et CO ne changeant pas pendant la marche, le mouvement de l'extrémité A de la tige est exactement le même que si ce point se trouvait relié à l'extrémité de l'arbre C par l'intermédiaire d'une bielle OA et d'une manivelle CO montée sur cet arbre.

Dans l'excentrique le frottement est plus considérable que dans le système bielle et manivelle; on l'emploie

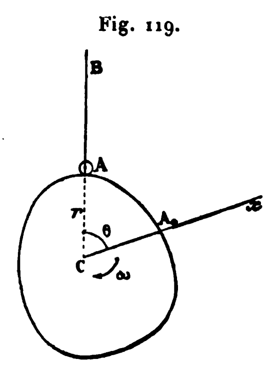
quand l'excentricité CO est trop petite pour permettre l'usage de la manivelle. L'excentrique présente cet avantage de pouvoir se mettre en un point quelconque de l'axe; la manivelle, au contraire, à moins d'employer un arbre coudé, ne peut être calée qu'à l'extrémité de l'arbre.

Dans les machines à vapeur, on se sert de bielle à manivelle pour les effets principaux, comme la transformation du mouvement du piston en mouvement circulaire; l'excentrique s'emploie pour le mouvement du tiroir.

191. *Excentrique à came.* — Cet organe est employé dans les machines pour transformer un mouvement de rotation uniforme en un mouvement rectiligne suivant une loi qu'on s'impose à volonté.

Proposons-nous de trouver le profil d'une came, dans

Fig. 119.



le cas où la direction AB (*fig.* 119) de la tige à faire mouvoir coupe normalement l'axe C de rotation de la came, le mouvement de la tige

$$r = f(t),$$

étant donné pour un tour entier de l'axe.

Soit CA_0 le rayon vecteur de la came, qui avait la direction AB à l'instant initial, on aura

$$\theta = \omega t,$$

d'où l'équation en coordonnées polaires du profil cherché

$$r = f\left(\frac{\theta}{\omega}\right).$$

Donnons-nous, par exemple, comme condition, que le mouvement de la tige soit uniforme pour un demi-tour du plateau

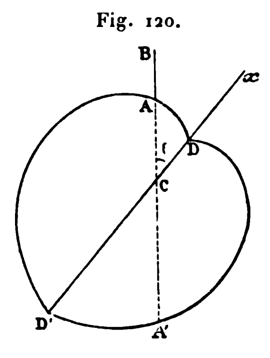
$$r = a + bt,$$

l'équation du profil de la came correspondante sera

$$r = a + \frac{b}{\omega}\theta;$$

c'est la courbe connue sous le nom de spirale d'Archimède; on prend seulement la portion de cette courbe

Fig. 120.



comprise entre les valeurs zéro et π de l'angle polaire et on la complète par une autre spirale symétrique de la première par rapport à l'axe polaire.

Le profil de cette came qu'on nomme, à cause de sa

forme, *excentrique à cœur*, jouit de la propriété suivante : les sécantes AA′ passant par le pôle C ont une longueur constante. On a en effet (*fig.* 120)

$$CA = a + \frac{b}{\omega}\theta, \qquad CA' = a + \frac{b}{\omega}(\pi - \theta),$$

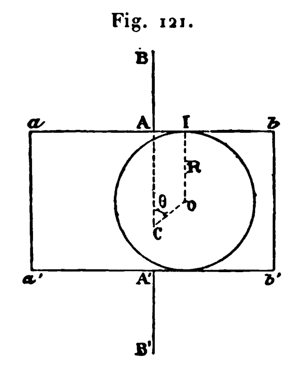
d'où

$$AA' = 2a + b\frac{\pi}{\omega} = \text{const.}$$

L'inconvénient de cet appareil, c'est que la vitesse de la tige AB change brusquement de sens quand le point A de la tige passe en D ou en D′; on n'y remédie que bien imparfaitement en arrondissant les angles de la courbe.

192. *Excentrique circulaire à cadre.* — Dans cet

Fig. 121.



excentrique la came est circulaire et agit par contact sur un cadre rectangulaire fixé à la tige AB (*fig.* 121).

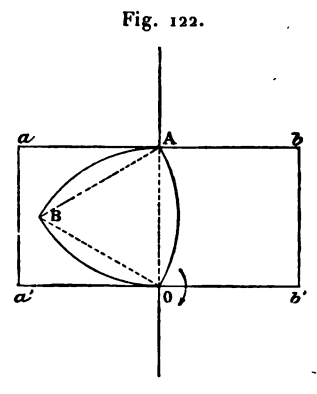
Le chemin CA parcouru par le point A de la tige est donné par la formule

$$CA = R + r\cos\theta,$$

dans laquelle r désigne l'excentricité et R le rayon de la came; ce mouvement est sinusoïdal.

193. *Excentrique triangulaire.* — Cet excentrique sert à transformer un mouvement circulaire continu en un mouvement rectiligne altèrnatif avec intermittences. Voici comment on détermine la came. On prend un triangle équilatéral OAB (*fig.* 122), dont un sommet O

Fig. 122.



est sur l'axe de rotation et l'on décrit des trois sommets des arcs de cercle ayant pour rayon le côté r du triangle; on a ainsi un triangle équilatéral curviligne qui constitue la came tournant autour du sommet O. On donne au cadre une hauteur $aa' = r$, en sorte que les côtés horizontaux du cadre sont toujours touchés l'un par un sommet, l'autre par le côté opposé de la came.

Un tour complet de l'arbre se divise en six périodes égales; pendant la première, le côté supérieur du cadre reste constamment tangent à l'arc AB et le cadre est immobile; dans la seconde période, le côté ab du cadre s'appuie sur le sommet B de la came tandis que OA est tangent à $a'b'$, enfin dans la troisième le sommet A con-

duit le côté $a'b'$ et OB est tangent à ab. Dans ces deux dernières périodes le cadre descend d'un mouvement sinusoïdal. Les trois autres périodes sont symétriques des premières.

Ces excentriques ont été quelquefois employés pour la distribution de la vapeur dans certaines machines d'un type particulier. Comme ils développent un frottement considérable, on ne s'en sert que pour transmettre des efforts faibles et dans le cas de mouvements très lents.

194. *Coulisse de Stephenson.* — Elle a été imaginée par Stephenson dès le principe de la découverte des machines à vapeur, dans le but de distribuer la vapeur et de changer à volonté le sens de la marche dans la machine. Pour les locomotives, elle est presque exclusivement employée.

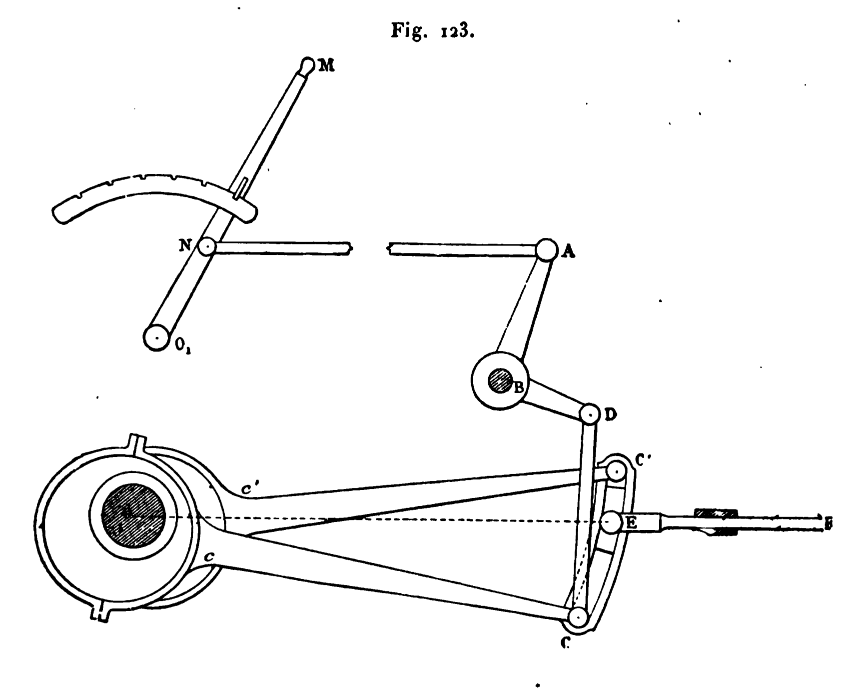
Une coulisse circulaire CC′ est articulée à ses extrémités avec deux bielles Cc, C′c' (*fig.* 123) mues par deux excentriques montés sur le même arbre O; dans la coulisse peut glisser un coulisseau E, auquel est articulée la tige EF du tiroir qu'on veut faire mouvoir d'un mouvement rectiligne alternatif. Ce mouvement est assuré soit par une glissière, soit approximativement par un levier tournant autour d'un point fixe et appelé *bielle de suspension.*

Enfin un levier coudé ABD dont le sommet B est fixe, est articulé d'une part par une barre DC à la coulisse, d'autre part à une tige rigide AN qui la relie à une poignée M à la portée du mécanicien. En manœuvrant le levier MO_1, qui tourne autour de O_1, on peut élever ou abaisser verticalement la coulisse CC′.

Ayant fixé la poignée M dans une position déterminée,

le levier ABD est fixe et le point C de la coulisse est

Fig. 123.



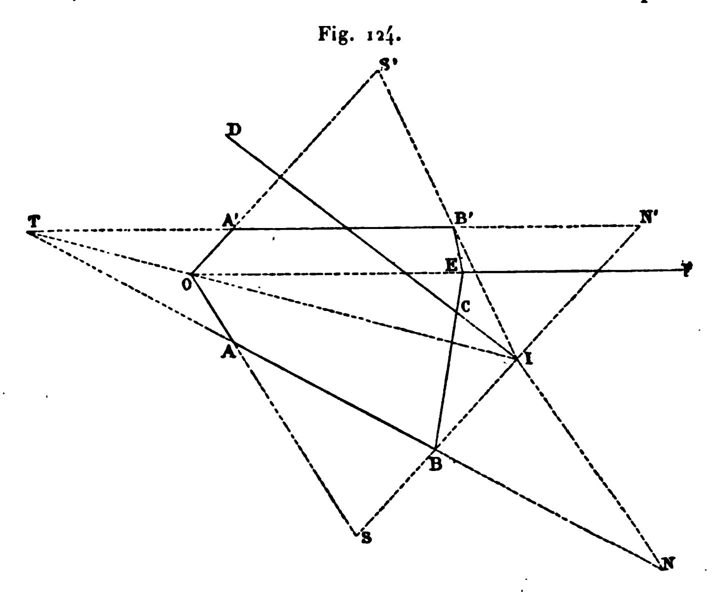
par suite assujetti à décrire un arc de cercle ayant pour centre le point D ; CD est la *bielle de relevage.*

195. Théorème de Philipps. — *Le point* T *de rencontre des bielles des excentriques, leur centre* O *de rotation et le centre instantané* I *de rotation de la coulisse sont en ligne droite.*

Soient (*fig.* 124) O l'axe commun de rotation des deux plateaux d'excentrique dont les centres sont en A et A'; AB et A'B' les deux barres d'excentrique; C le point d'articulation de la bielle de relevage dont le point

D est fixe pendant le mouvement. Le point C décrivant un cercle de centre D, le centre instantané de la coulisse se trouve sur cette droite, soit I ce point. Les droites OA et IB étant normales aux trajectoires des points A et B, le centre intantané S de la bielle AB est au point

Fig. 124.



de rencontre de ces deux droites; de même le centre instantané de A'B' est en S'.

Soient ω la vitesse de rotation de l'arbre des excentriques, ω' la vitesse de rotation instantanée de la coulisse, ω_1 et ω'_1 les vitesses des rotations instantanées de AB et de A'B'; égalant les deux expressions de la vitesse du point A, on a

$$\omega \times OA = \omega_1 \times SA;$$

on a également pour le point B

$$\omega_1 \times SB = \omega' \times IB,$$

d'où

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OA \times SB}{SA \times IB}.$$

Nous aurons de même avec la seconde barre A'B'

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{OA' \times S'B'}{S'A' \times IB'},$$

d'où

$$\frac{OA \times SB}{SA \times IB} = \frac{OA' \times S'B'}{S'A' \times IB'}.$$

Menons IN parallèle à AO, IN' parallèle à A'O, nous avons

$$IN = \frac{SA \times IB}{SB}, \qquad IN' = \frac{S'A' \times IB'}{S'B'};$$

on peut donc écrire l'égalité précédemment obtenue

$$\frac{OA}{IN} = \frac{OA'}{IN'},$$

donc les trois droites IO, BA et B'A' sont concourantes et le centre instantané I de la coulisse est à l'intersection des droites TO et DC.

On peut encore démontrer le théorème de Philipps en s'appuyant sur le théorème général suivant :

196. Théorème. — *Le lieu du centre instantané d'une tige d'un système incomplet, auquel il ne manque qu'une liaison, est une droite.*

Soient, en effet, μ et μ_1 deux mouvements possibles de la pièce dans son plan, I_1 et I_2 les centres instantanés correspondants, le mouvement résultant de μ_1 et μ_2 est encore compatible avec les liaisons et a lieu autour d'un centre instantané I situé sur $I_1 I_2$, et comme le rapport

$\frac{\mu_1}{\mu_2}$ des vitesses angulaires est arbitraire, puisqu'il manque une liaison, le lieu du point I est la droite I_1I_2.

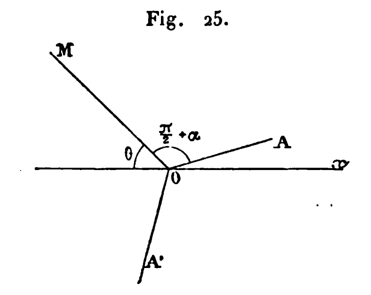
Cela posé, la coulisse est un système à liaison complète, car la position de l'un de ses points étant fixée, il en est de même de tout le système et le centre instantané d'une quelconque des pièces est entièrement déterminé; mais si nous coupons la bielle de relevage, on aura un système à liaisons incomplètes. Parmi les mouvements de la coulisse compatibles avec ces liaisons incomplètes, on aura d'abord une rotation autour de O et dans cette rotation le point O est le centre instantané de rotation de la coulisse; nous en aurons un second en fixant les points A et A'. Dans ce second mouvement le point B est sur un cercle décrit de A comme centre, le centre instantané est donc sur BA; il est de même sur B'A', donc il est au point T de rencontre de ces deux droites et la droite TO est le lieu des centres instantanés de la coulisse. Si maintenant on rétablit la liaison, le centre instantané I sera au point de rencontre de TO et de DC.

197. *Étude analytique de la coulisse de Stephenson.* — Dans la pratique on prend $OA = OA' = r$ et $AB = A'B'$; soit $OM = R$ (*fig.* 125) la manivelle du piston qui communique le mouvement à l'arbre O, on fait en outre $AOM = A'OM > \frac{\pi}{2}$ et l'on appelle angle de calage l'angle α défini par la relation $AOM = \frac{\pi}{2} + \alpha$. Les deux excentriques et la manivelle OM du piston étant calés sur le même arbre, l'angle de calage α est une constante.

Supposons maintenant que la distribution de la vapeur soit commandée par un seul excentrique articulé par une

bielle avec la tige du piston, et soit Ox la direction commune des tiges du piston et du tiroir. On appelle *élongation* du tiroir la quantité dont il s'écarte de sa position

Fig. 25.



moyenne; en comptant les élongations dans le sens Ox, celle du piston est $-\mathrm{R}\cos\theta$, et celle du tiroir

$$-r\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=r\sin(\theta+\alpha).$$

Cette dernière sera maximum quand on aura $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$, c'est-à-dire pour la position OB faisant avec Oy l'angle α (*fig.* 126). Si l'on mène par O une perpendiculaire CC' à OB, elle fera avec Ox l'angle α, et l'angle $\theta+\alpha$ pour un point quelconque M sera l'angle COM; il en résulte qu'en deux points M et M' symétriques par rapport à BB', $\sin(\theta+\alpha)$ reprend la même valeur et l'élongation du tiroir est la même.

On a

$$\mathrm{OR}=\mathrm{R}\cos\mathrm{ROM}=\mathrm{R}\cos\left(\theta+\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$=\mathrm{R}\sin(\theta+\alpha),$$
$$\mathrm{OH}=\frac{\mathrm{OR}}{\sin\alpha}=\frac{\mathrm{R}\sin(\theta+\alpha)}{\sin\alpha};$$

on peut exprimer OH en fonction de l'élongation x du

tiroir

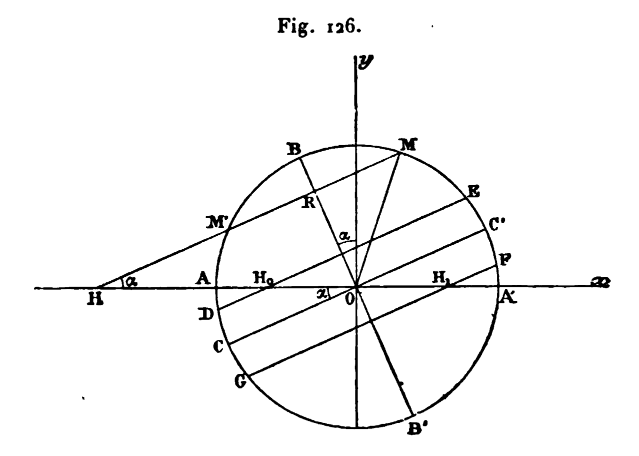
$$x = r \sin(\theta + \alpha),$$

d'où

$$OH = \frac{xR}{r \sin\alpha}.$$

Soient x_0 et x_1 les élongations des points où la lumière commence à être ouverte ou fermée par le tiroir; $x_0 > 0$

Fig. 126.



sera le recouvrement extérieur, $x_1 < 0$ le recouvrement intérieur. Si $x > x_0$ il y a admission, si x est compris entre x_0 et x_1 la lumière d'admission est couverte, il y a détente ou compression. Enfin si $x < x_1$ la lumière d'admission est démasquée, elle communique avec la lumière d'échappement.

Prenons sur le diamètre horizontal AA' deux points H_0 et H_1 tels que

$$OH_0 = \frac{x_0 R}{r \sin\alpha}, \qquad OH_1 = \frac{x_1 R}{r \sin\alpha},$$

et par ces points menons deux droites parallèles faisant

avec AA′ un angle α, la droite DE correspond à l'élongation x_0 et GF à l'élongation x_1. Cela posé, supposons que la demi-circonférence supérieure corresponde à la course d'aller du piston et la demi-circonférence inférieure à la course de retour, et considérons la course d'aller :

Le bouton M allant de A en E, il y a admission ;
» » de E en F, il y a détente; en F l'échappement commence;
» » de F en A′, il y a échappement anticipé.

Pour la course de retour :

Le bouton M allant de A′ en G, il y a échappement continu;
» » G en D, il y a compression;
» » D en A, il y a admission anticipée.

Ce diagramme donne à la fois la durée de ces diverses périodes et le chemin parcouru par le piston pendant chacune d'elles. Par exemple, l'arc EF représente le temps de la détente, puisque le bouton de la manivelle décrit la circonférence d'un mouvement uniforme. Le chemin parcouru par le piston sera la projection horizontale de l'arc décrit par le bouton M.

198. Il est alors facile de voir l'influence de la coulisse de Stephenson sur les différentes périodes d'admission, de détente ou d'échappement de la vapeur.

Soient OM la manivelle motrice, BB′ la coulisse circulaire (*fig.* 127), E le coulisseau auquel est fixée la tige du tiroir dont le prolongement passe par l'axe O de rotation; posons

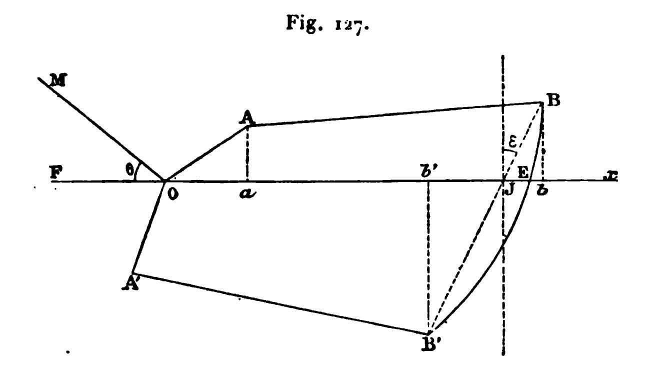
$$\mathrm{OA} = \mathrm{OA'} = r, \qquad \mathrm{AB} = \mathrm{A'B'} = l,$$

$$\mathrm{AOM} = \mathrm{A'OM} = \frac{\pi}{2} + \alpha,$$

$$\text{corde}\,\mathrm{BB'} = 2c, \qquad \mathrm{BJ} = c - u.$$

Nous considérerons, dans le calcul c, r et u comme des infiniment petits et nous traiterons r qui est le plus petit comme du second ordre, enfin nous négligerons les infiniment petits du troisième ordre. Vu les dimensions de l'appareil, ces hypothèses peuvent être admises; elles en

Fig. 127.



simplifient la théorie tout en conduisant à des résultats très approchés de la réalité.

Appelons a, b et b' les projections des points A, B et B' sur l'horizontale Ox, et ε l'angle infiniment petit de BB' avec la verticale; on a

$$\frac{\mathrm{J}b}{c-u} = \frac{\mathrm{J}b'}{c+u} = \frac{bb'}{2c},$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathrm{OJ} = \mathrm{O}b - \mathrm{J}b &= \mathrm{O}b - bb'\frac{c-u}{2c} \\
&= \mathrm{O}b - (\mathrm{O}b - \mathrm{O}b')\frac{c-u}{2c} \\
&= \mathrm{O}b\frac{c+u}{2c} + \mathrm{O}b'\frac{c-u}{2c}.
\end{aligned}$$

Évaluons Ob et Ob',

$$Ob = Oa + ab,$$

$$Oa = r\cos\left[\pi - \left(\theta + \frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right] = r\sin(\theta + \alpha),$$

$$ab = \sqrt{l^2 - (Bb - Aa)^2},$$

$$(Bb - Aa)^2 = \overline{Bb}^2 - 2Aa \times Bb + \overline{Aa}^2.$$

Bb est du premier ordre et Aa du second comme r, le deuxième et le troisième terme sont donc du troisième et du quatrième ordre et l'on peut, avec l'approximation à laquelle nous nous arrêtons, remplacer $(Bb - Aa)^2$ par $\overline{Bb}^2$, or

$$Bb = BJ\cos\varepsilon = (c - u)\left(1 - 2\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

et comme $c - u$ est du premier ordre ainsi que ε, on a encore, au troisième ordre près,

$$Bb = c - u$$

et

$$ab = \sqrt{l^2 - (c - u)^2} = l\left[1 - \left(\frac{c - u}{l}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ou en développant

$$ab = l - \frac{(c - u)^2}{2l},$$

et enfin

$$Ob = r\sin(\theta + \alpha) + l - \frac{(c - u)^2}{2l},$$

$$Ob = r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha + l - \frac{(c - u)^2}{2l};$$

on en déduit Ob' en changeant θ et u en $-\theta$ et $-u$,

$$Ob' = -r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha + l - \frac{(c + u)^2}{2l}.$$

Portant ces valeurs dans l'expression de OJ, on a

$$\mathrm{OJ} = \frac{ru}{c}\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha + l - \frac{c^2 - u^2}{2l}.$$

Calculons JE; on a approximativement, en appelant ρ le rayon de la coulisse circulaire,

$$\mathrm{JE} = \frac{\mathrm{JB}\times\mathrm{JB}'}{2\rho} = \frac{c^2 - u^2}{2\rho},$$

et

$$\mathrm{OE} = \mathrm{OJ} + \mathrm{JE} = \frac{ru}{c}\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha + l + \frac{c^2 - u^2}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{l}\right),$$

u variant très peu quand la barre de relevage est fixe, la valeur moyenne de OE est $l + \frac{c^2 - u^2}{2}\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{l}\right)$. Il faut qu'elle soit constante et indépendante de u, parce qu'il est nécessaire que la position moyenne du tiroir corresponde au milieu de la lumière d'échappement, c'est ce qu'on obtient en prenant $\rho = l$; l'élongation du tiroir est alors

$$x = \frac{ru}{c}\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha.$$

Nous regarderons u comme indépendant de θ pour une position donnée de la barre de relevage, et nous poserons

$$\frac{ru}{c}\cos\alpha = r'\cos\alpha', \qquad r\sin\alpha = r'\sin\alpha',$$

d'où

$$x = r'\sin(\alpha' + \theta),$$

ce qui nous montre que le tiroir se comportera comme s'il n'y avait qu'un seul excentrique ayant pour rayon r' et pour angle de calage α'.

Le nouvel angle de calage α' est donné par la formule

$$\operatorname{tang}\alpha' = \frac{c}{u}\operatorname{tang}\alpha;$$

il varie avec u, pour

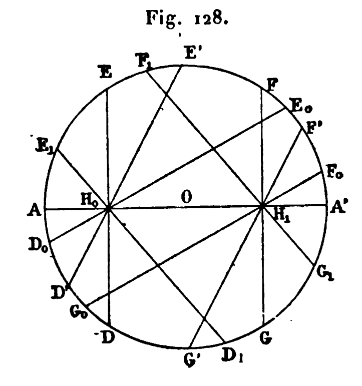
$$u = c, \quad \alpha' = \alpha,$$

$$u = 0, \quad \alpha' = \frac{\pi}{2},$$

$$u = -c, \quad \alpha' = \pi - \alpha.$$

Voyons comment va varier le diagramme qui représente les diverses circonstances de la distribution quand on

Fig. 128.



manœuvre la barre de relevage; remarquons que les points H_0 et H_1 restent fixes quand α' varie, on a, en effet (*fig.* 128),

$$OH_0 = \frac{x_0 R}{r' \sin\alpha'} = \frac{x_0 R}{r \sin\alpha}.$$

Disposons d'abord la bielle de relevage de telle sorte que $u = c$, α' a sa valeur minimum et les points E et F sont en E_0 et F_0; avançant la bielle de relevage, les droites DE, GF prennent les positions D'E', G'F'. La durée de

la détente étant proportionnelle à EF a augmenté, car $E'F' > E_0 F_0$ et en même temps la course du piston pendant la détente augmente, car l'arc EF croît et prend une position moins inclinée sur AA'; on augmente aussi la durée de l'admission anticipée et de la détente anticipée.

Quand $u = 0$, l'angle de calage $\alpha' = \frac{\pi}{2}$, l'admission anticipée DA est égale à l'admission utile AE; le travail de la vapeur est négatif pendant l'admission anticipée et positif pendant l'admission utile. Au bout d'une course du piston le travail opéré sera nul; on est au point mort. Continuant à tourner le levier de la bielle de relevage jusqu'à ce que $u = -c$, l'angle α' devient obtus et égal à $\pi - \alpha$, l'admission anticipée D_1A est plus grande que l'admission utile, le travail de la machine est négatif et l'on marche à contre vapeur.

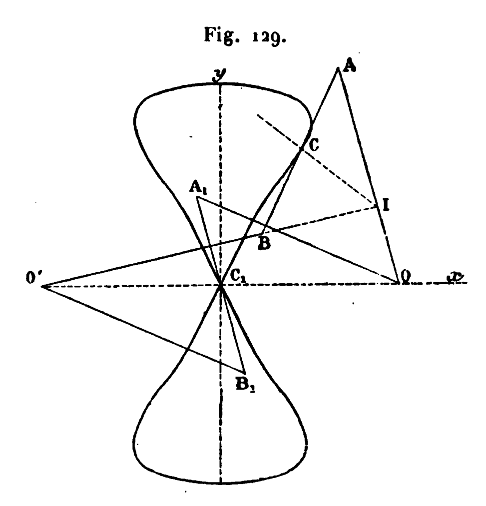
3. — Transformation du mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif.

199. Cette transformation de mouvement est réalisée d'une façon approchée par deux balanciers avec contre-balancier et le parallélogramme Watt, et d'une manière rigoureuse par l'inverseur Peaucellier.

200. *Balanciers et contre-balancier.* — Ce système se compose de deux balanciers égaux OA, O'B mobiles le premier autour du point O, le second autour de O' (*fig.* 129) et dont les extrémités sont réunies par une bielle. Le point C, milieu de cette bielle, décrit une courbe qui diffère très peu d'une droite sur une certaine étendue. Pour le démontrer, nous remarquerons d'abord que le centre instantané de la bielle AB est au point I de

rencontre des normales OA et O'B aux trajectoires des points A et B, et par suite que CI est la normale à la courbe cherchée. En outre, cette courbe passe par le point C_1 milieu de OO' car, quand les balanciers OA et O'B deviennent parallèles, la bielle est coupée en son

Fig. 129.



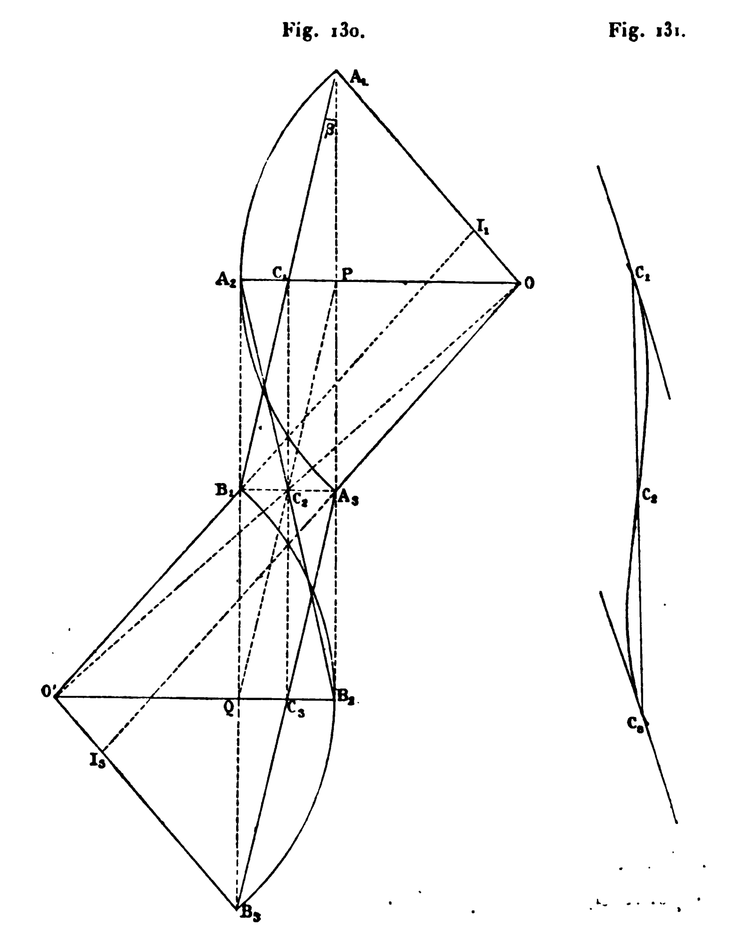
milieu par la droite OO'; le centre instantané de rotation correspondant étant rejeté à l'infini dans la direction commune à OA_1 et $O'B_1$, la tangente au point C_1 est normale à ces droites.

Ce point C_1 est de plus un centre de symétrie de la courbe, car la droite OO' et sa perpendiculaire $C_1 y$ sont évidemment des axes de symétrie de la trajectoire du milieu C de AB, et comme C_1 est sur la courbe décrite par le point C, c'est un point d'inflexion de cette courbe.

201. En pratique, on dispose les choses comme suit : l'extrémité A du premier balancier OA décrit l'arc $A_1A_2A_3$ (*fig.* 130) dont la corde A_1A_3 est verticale : on

joint le point A_1 au milieu C_1 de la flèche horizontale A_2P et l'on prolonge cette droite d'une longueur $C_1B_1 = A_1C_1$;

Fig. 130. Fig. 131.



le point B_1 sera sur la verticale du point A_2, milieu de la course du point A, en vertu de l'égalité des triangles A_1C_1P, $A_2C_1B_1$. Prenant sur cette même verticale une

longueur

$$B_1B_3 = 2A_2B_1 = A_1A_3,$$

on aura les extrémités de l'arc $B_1B_2B_3 =$ arc $A_1A_2A_3$ décrit par le point B du deuxième balancier O'B.

Les positions extrêmes A_1B_1, A_3B_3 de la bielle sont parallèles puisque B_1B_3 est égal et parallèle à A_1A_3; de plus si B_2 est le milieu de l'arc B_1B_3, la droite $A_2B_2 = PQ$ comme diagonales d'un même rectangle; or $PQ = A_1B_1$, donc A_2B_2 est la position moyenne de la bielle, et dans cette position les deux balanciers sont horizontaux.

De ce qui précède il résulte que la tangente au point d'inflexion C_2, qui est en même temps centre de symétrie, est la verticale C_1C_3, et que les tangentes aux points extrêmes C_1 et C_3 de la trajectoire du point C sont peu éloignées de la verticale, puisque I_1 et I_3 centres instantanés de la bielle correspondants à ces positions extrêmes, sont peu éloignés, respectivement des points O et O'.

La trajectoire de C, que l'on nomme courbe à longue inflexion, aura donc la forme qu'indique la *fig.* 131, elle présentera trois points d'inflexion et se rapprochera beaucoup d'une droite verticale.

Connaissant l'angle 2α que font entr'elles les positions extrêmes du balancier OA, on peut calculer l'angle maximum β que la bielle fait avec la verticale; soient $OA = O'B = L$ et $AB = 2l$, on a

$$\sin\beta = \frac{\frac{1}{2}A_2P}{l} = \frac{L(1-\cos\alpha)}{2l} = \frac{L}{l}\sin^2\frac{\alpha}{2};$$

en pratique, l'angle α ne dépasse jamais 18°, et quoique L soit notablement plus grand que l, l'angle β est très petit. On peut donc écrire approximativement

$$\beta = \frac{L\alpha^2}{4l}.$$

202. Proposons-nous actuellement de rechercher l'écart maximum du point C avec la verticale $C_1C_2C_3$; il faut distinguer deux sortes d'écart, l'écart linéaire ε ou distance du point C à la verticale moyenne et l'écart angulaire λ de C_2C avec la verticale; on a

$$\varepsilon = C_2C \times \sin\lambda < C_2C \times \lambda,$$

or

$$C_2C < C_2C_1, \qquad C_2C_1 = A_1P = L\sin\alpha < L\alpha,$$

donc

$$\varepsilon < L\alpha\lambda.$$

Pour trouver la relation entre la valeur maximum λ_1 de λ et l'angle β, nous démontrerons d'abord le théorème suivant :

Soit OABO' *une position du système, si par le point* O *on mène* OH *égal et parallèle à* AC; *l'angle* CC_2H *est droit* (*fig.* 132).

Si, en effet, on mène les deux droites OB et CH qui se coupent en K, les deux triangles CBK, HKO sont égaux; le point K étant par suite le milieu des droites CH et BO, on a

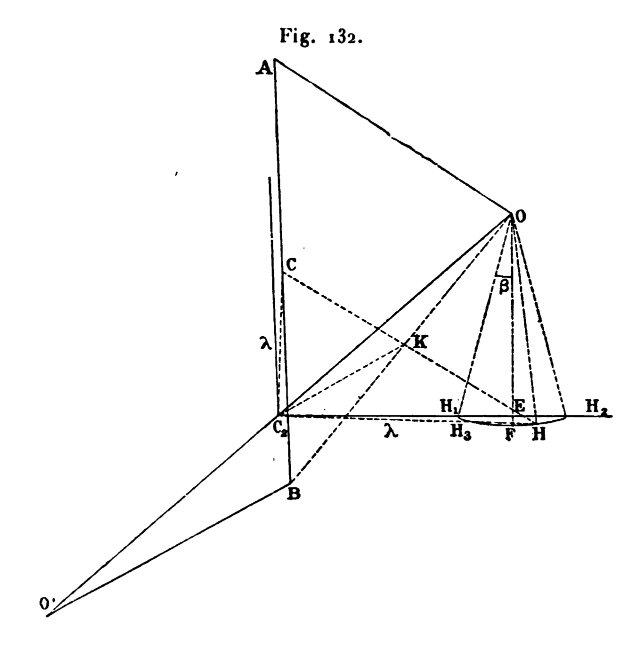
$$KC = KC_2 = KH = \frac{L}{2},$$

si donc de K comme centre avec $\frac{L}{2}$ comme rayon, on décrit une demi-circonférence, elle passera par les trois points C, C_2 et H, donc l'angle CC_2H est droit. Il en résulte que l'écart angulaire λ est égal à l'angle de C_2H avec l'horizontale; cet angle λ est d'ailleurs nul aux points extrêmes C_1 et C_3 et au point d'inflexion C_2, donc les points correspondants H_1 et H_3 qui se confondent et le point H_2 sont sur l'horizontale de C_2. D'ailleurs le lieu des points H étant

une circonférence décrite de O comme centre avec la demi-longueur l de la bielle comme rayon, on a approximativement

$$\lambda_1 = \frac{EF}{C_2E} = \frac{l(1 - \cos\beta)}{L} = \frac{l\beta^2}{2L};$$

Fig. 132.



c'est la relation cherchée.

On en déduit successivement

$$\lambda_1 = \frac{l}{2L}\,\frac{L^2\alpha^4}{16l^2} = \frac{L}{32\,l}\,\alpha^4,$$

et

$$\varepsilon < \frac{L^2}{32\,l}\,\alpha^5.$$

On prend d'ordinaire

$$\alpha = \frac{1}{3}, \qquad \frac{l}{L} = \frac{1}{3},$$

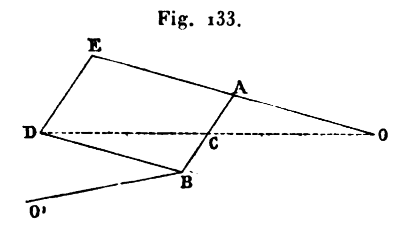
on trouve alors

$$\varepsilon < \frac{L}{2592}.$$

Avec un balancier de 2^{m} par exemple (c'est un grand balancier), l'écart linéaire maximum est inférieur à $0^{m},001$, c'est à peine le jeu de l'appareil.

203. *Parallélogramme de Watt.* — Il se compose de deux balanciers OA, O′B réunis par la bielle AB et d'un

Fig. 133.



parallélogramme articulé AEDB tel que le côté AE = OA est le prolongement du balancier OA (*fig.* 133).

Si l'on joint OD, cette droite passe constamment par le milieu C de AB et l'on a OD = 2 OC, donc les trajectoires des points C et D sont des courbes semblables et le point D décrit comme le point C une courbe à longue inflexion.

En théorie ce système ne diffère en rien du premier, mais en pratique il présente sur lui de précieux avantages qui le font employer presque exclusivement.

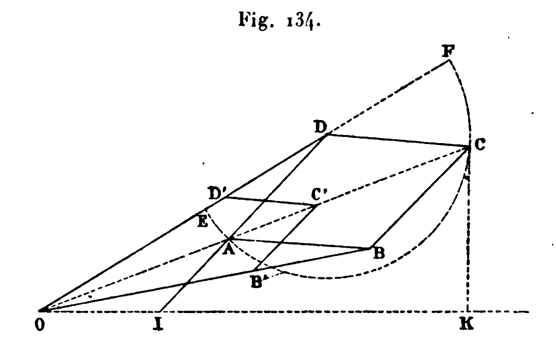
1° Pour un mouvement rectiligne d'amplitude donnée, le balancier O′B est moitié moins long, par suite la machine tient moins de place.

2° On a deux points D et C qui décrivent sensiblement des lignes droites; alors on articule la tige du piston en D et celle de la pompe du condenseur en C.

204. *Inverseur Peaucellier.* — On a cru pendant longtemps que la transformation sans guides d'un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne simultanément alternatifs n'était susceptible que d'une solution approchée; le général Peaucellier a trouvé un mécanisme très simple en théorie et qui conduit à une solution rigoureuse du problème.

Soient ABCD (*fig.* 134) un losange articulé et l la

Fig. 134.



longueur commune de ses côtés; les sommets B et D sont reliés à un point fixe O par des tiges rigides égales, de longueur L. Le triangle OBD étant isocèle, les points A et C se trouvent sur sa hauteur et la figure reste symétrique par rapport à la diagonale AC du losange.

Du point D comme centre avec l pour rayon, décrivons une demi-circonférence, elle passera par les points C et A et l'on aura

$$OA \times OC = OE \times OF = L^2 - l^2 = \text{const.};$$

les deux points A et C décrivent donc deux courbes transformées l'une de l'autre par rayons vecteurs réciproques, de là le nom d'*inverseur* donné parfois à l'appareil de M. Peaucellier. Cela posé, la transformée d'un cercle passant par le centre de transformation étant une droite, si l'on relie le point A à un point fixe I par une bielle de longueur égale à IO, le point A décrira un cercle passant en O et le point C une droite CK normale à la direction OI.

Le losange de Peaucellier fournit autant de points qu'on le veut, animés d'un mouvement rectiligne parallèle à CK; articulons en effet, en deux points symétriques D′ et B′ des brides OD et OB, deux tiges égales D′C′, B′C′ articulées en C′; le point C′ se mouvra en ligne droite, à la condition que

$$\frac{OD'}{OD} = \frac{D'C'}{DC}.$$

Le parallélogramme de Watt fournissant une solution très suffisamment approchée pour la pratique est presque exclusivement employé, parce qu'il est moins encombrant que l'inverseur Peaucellier.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

Pages.
INTRODUCTION V

CHAPITRE I.

MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

1. — Préliminaires 1

De la grandeur géométrique 1
Des trièdres direct et inverse 3

2. — Vitesse d'un point matériel 5

Projections de la vitesse en coordonnées rectangulaires 7
Mouvement d'un point sur un cercle 8
Projections de la vitesse, en coordonnées polaires planes, sur le rayon vecteur et sa perpendiculaire 9
Coordonnées polaires généralisées 9
Méthode de Roberval 11
Projections de la vitesse en coordonnées cylindriques ou semi-polaires 13
Projections de la vitesse en coordonnées sphériques ou polaires.. 13
Composantes de la vitesse en coordonnées curvilignes 14

3. — Accélération dans le mouvement d'un point matériel 16

Projections de l'accélération en coordonnées rectilignes rectangulaires 16

Pages.

Projections de l'accélération sur la tangente et la normale principale à la trajectoire 18
Application au mouvement d'un point qui se déplace sur une hélice quelconque avec une vitesse constante 21
Projections de l'accélération en coordonnées polaires dans le mouvement plan 22
Projections de l'accélération en coordonnées semi-polaires 23
Projections de l'accélération en coordonnées polaires 23
Autre définition de l'accélération 25
Accélérations de divers ordres 26

4. — Des accélérations centrales 28

Mouvement d'un point dont la direction de l'accélération passe par un point fixe 28
Mouvement d'un point sur une ellipse, l'accélération passant constamment par un foyer 30
Mouvement sur une ellipse d'un point dont l'accélération est dirigée vers le centre 32

CHAPITRE II.

MOUVEMENT PLAN D'UN SYSTÈME INVARIABLE

1. — Généralités sur le mouvement des systèmes 34

Mouvement d'un système invariable 35

1° Translation 35
2° Rotation 35

Mouvement relatif d'un point 38

2. — Centre instantané de rotation 40

3. — Mouvement épicycloïdal plan 46

Méthode géométrique 46
Étude analytique du mouvement épicycloïdal 48

1° Equation de la base 50
2° Equation de la roulante 50

Pages.

Applications. — 1° Normale à la cycloïde et à l'épicycloïde...... 52

2° Roulette du pôle P d'une spirale logarithmique qui roule sur une droite fixe Ox.. 53

3° Les deux extrémités A et C d'une droite de longueur fixe AC, glissent sur deux droites Ox, Oy, faisant entre elles un angle donné, cette droite entraîne un plan; trouver la base et la roulante.. 53

Problème. — On donne la base B et la roulette D que doit décrire un point M du plan mobile, trouver la roulante........ 54

Applications. — 1° La base B et la roulette D sont deux droites. 55

2° La base B est une droite OX et D la chaînette correspondante $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{x}{a}}\right)$.... 56

Enveloppe d'une courbe mobile................................ 56

Applications. — 1° Un angle de grandeur constante se meut dans son plan, de manière que ses côtés touchent chacun une courbe donnée ; trouver le centre instantané, pour une position déterminée.. 59

2° Une droite se meut en restant tangente à une courbe A, un de ses points K décrivant une courbe C, construire la normale à la courbe décrite par un point quelconque M de cette droite... 60

3° Un angle droit APB se déplace de telle sorte que l'un de ses côtés passe par un point A fixe sur la droite OX, et qu'un point fixe B du second côté décrive la droite Oy, perpendiculaire sur Ox ; on se donne la condition PB = OA et l'on propose de trouver la base et la roulante de ce mouvement..... 61

4° Un cercle C roule sur un cercle C', trouver l'enveloppe d'un diamètre AB du cercle C................................ 62

Mouvement relatif du plan fixe par rapport au plan mobile....... 63

4. — Centre des accélérations............. 64

Détermination du centre des accélérations, à un instant donné.. 66

Méthode géométrique.. 68

Cercle des inflexions... 70

Lieu des points dont l'accélération est normale................. 71

Pages.

5. — Rayons de courbure 72

Relation entre la vitesse angulaire et la vitesse de déplacement du centre instantané 72

1er *Cas.* — Concavités opposées 73

2e *Cas.* — Concavités de même sens 74

Autre formule 75

Cas particuliers. — 1° La base est une droite 76

2° La roulante est une droite 76

Centre de courbure d'une roulette 77

Centre de courbure de l'enveloppe d'une courbe 79

Construction de Savary 83

Construction de Savary modifiée 84

6. — Applications géométriques 86

Problème. — Connaissant les centres de courbure des roulettes décrites par deux points M et N d'un plan mobile, trouver le centre instantané de rotation I et le centre géométrique J des accélérations 86

Centre de courbure de l'ellipse 89

Centre de courbure de la conchoïde 91

Roulement de deux courbes symétriques 92

Centre de courbure de la parabole 94

Aire de la roulette décrite par un point 96

Condition pour qu'une roulette présente un rebroussement ... 98

Du glissement 100

Glissement d'une courbe mobile sur son enveloppe 102

De l'épicycloïde 103

Coordonnées d'un point de l'épicycloïde 103

Points de rebroussement ou d'inflexion 105

Formes particulières de l'épicycloïde 106

Centre de courbure de l'épicycloïde ordinaire 108

Enveloppes de diverses lignes invariablement liées à la figure mobile 110

Longueur de l'arc de l'épicycloïde ordinaire 111

CHAPITRE III.

MOUVEMENT D'UN SYSTÈME INVARIABLE AUTOUR D'UN POINT FIXE

Pages.

1. — Axe instantané de rotation 112

Étude analytique du mouvement d'un solide qui présente un point fixe 116
Projections de la vitesse d'un point sur les axes entraînés 119
Autres relations entre les cosinus directeurs et leurs dérivées 120

2. — Mouvement épicycloïdal sphérique 122

Méthode géométrique 122
Étude analytique du mouvement épicycloïdal sphérique 124
1° Équation du cône base 124
2° Équation du cône roulant 124

3. — Accélération dans le mouvement d'un solide autour d'un point fixe 127

Projections de l'accélération d'un point sur les axes fixes 127
Accélération angulaire 128
Vitesse de roulement 130
Détermination des composantes de l'accélération avec un choix particulier d'axes coordonnées 131
Projections de l'accélération d'un point sur les axes entraînés 133

4. — Centre de courbure géodésique 135

Relation entre la vitesse angulaire de rotation et la vitesse de roulement 135
Centre de courbure géodésique d'une roulette sphérique 139

CHAPITRE IV.

MOUVEMENT LE PLUS GÉNÉRAL D'UN SYSTÈME INVARIABLE

Pages.

1. — Axe hélicoïdal 150

Déplacement d'un segment de droite 150
Étude analytique du mouvement général d'un solide 150

2. — Représentation géométrique du mouvement 150

Lieu des axes hélicoïdaux dans l'espace 152
Lieu des axes hélicoïdaux dans le corps 154
Les deux surfaces se raccordent en tous les points de leur génératrice commune 155
Deux courbes quelconques lieux de points correspondants sur les deux surfaces ne sont pas généralement tangentes 157
Les aires entourées sur les deux surfaces par des courbes correspondantes sont égales 158
Vitesse de l'axe hélicoïdal 159

3. — Accélération 160

4. — Foyers, plans focaux et droites conjuguées 161

Problème. — Une droite étant donnée, trouver sa conjuguée.... 166
Problème. — Trouver le point central et le paramètre de distribution d'une génératrice d'une surface gauche 168
Déplacement d'un corps solide assujetti à certaines conditions.... 170
Application. — Mouvement d'un corps solide dont un point décrit une surface donnée, tandis qu'un plan lié au corps reste tangent à une autre surface, le point de contact restant fixe dans le plan 173

5. — Des complexes linéaires 174

Propriétés des surfaces réglées dont toutes les génératrices font partie d'un complexe linéaire 178

Pages.
Les tangentes à la courbe, lieu des points pour lesquels le plan tangent et le plan polaire coïncident font partie d'un complexe linéaire 179
Cette courbe est une ligne asymptotique de la surface 179
Le degré de cette courbe C est égal à la classe d'une section plane quelconque de la surface 179
Surfaces réglées ayant deux directrices rectilignes 180
Surfaces réglées du troisième ordre 181

CHAPITRE V.

COMPOSITION DES MOUVEMENTS

1. — Composition des vitesses 183

Application. — Trouver les trajectoires orthogonales des génératrices rectilignes d'une hyperboloïde de révolution 184
Composition de deux translations 185
Composition de deux rotations autour d'axes concourants 185
Composition de deux rotations autour d'axes parallèles et de même sens 187
Composition de deux rotations autour d'axes parallèles et de sens contraires 188
Couple de rotation 188
Composition de deux rotations autour d'axes quelconques 191

2. — Composition des accélérations 195

Théorème de Coriolis 195
Démonstration géométrique 196
Démonstration analytique 198
Application 200
Théorème de Rivals 201

CHAPITRE VI.

MÉCANISMES

Pages.
Définitions.. 204

1. — Transformation d'un mouvement circulaire continu en un mouvement circulaire continu.............. 205

1° *Les axes sont parallèles*.................................... 205
Manivelles et bielle d'accouplement............................ 205
Courroie de transmission....................................... 206
Des engrenages... 207
Détermination du profit des dents.............................. 209
Engrenages à lanterne.. 209
Engrenages à dents épicycloïdales.............................. 209
Engrenages à développantes de cercles.......................... 212
Engrenages intérieurs.. 215
Crémaillère.. 218
Détails pratiques sur les engrenages........................... 218
Détermination du nombre des dents des roues d'un engrenage.... 220
Trains épicycloïdaux... 222
Engrenages hélicoïdaux de Hooke et de White.................... 224

2° *Les axes sont concourants*.................................. 226
Engrenages coniques.. 226
Joint de Cardan.. 228

3° *Les axes ne sont pas dans un même plan*..................... 231
Équipages de roues dentées..................................... 231
Poulies et courroies... 232
Engrenages hyperboliques....................................... 234
Vis sans fin... 236

2. — Transformation du mouvement circulaire continu en rectiligne ou circulaire alternatif............. 238

Bielle et manivelles... 238
Bielle à manivelle... 238

Pages.
Excentrique circulaire.......... 241
Excentrique à came.......... 242
Excentrique circulaire à cadre.......... 244
Excentrique triangulaire.......... 245
Coulisse de Stephenson.......... 246
Étude analytique de la coulisse de Stephenson.......... 250

3. — Transformation du mouvement circulaire alternatif en rectiligne alternatif.......... 258

Balanciers et contre-balancier.......... 258
Parallélogramme de Watt.......... 264
Inverseur Peaucellier.......... 265

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

Paris. — Imp. Gauthier-Villars et fils, quai des Grands-Augustins, 55.

